DURCHSCHNITTSKOSTEN IN SEMIREGENERATIVEN ENTSCHEIDUNGSMODELLEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

HANS DEPPE

aus

BIELEFELD

1980

BONN 1981

DURCHSCHNITTSKOSTEN IN SEMIREGENERATIVEN ENTSCHEIDUNGSMODELLEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von
HANS DEPPE
aus
BIELEFELD

BONN 1981

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-
Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn

1. Referent: Professor Dr. M. Schäl
2. Referent: Professor Dr. W. Vogel

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Oktober 1980

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn
Abteilung für Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik
Direktor: Professor Dr. W. Vogel

UNIV. LEIDEN BIBL.

Druck: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Einleitung		5
I.	Semiregenerative Prozesse	
§1	Definition und grundlegende Eigenschaften	15
§2	Startmaße, Erneuerungs- und Rekurrenzverhalten	24
§3	Stationäre Maße	36
II.	Semiregenerative Prozesse mit Kosten	
§4	Die Kostenstruktur	46
§5	Durchschnittskosten	52
§6	Stationäre Strategien	63
§7	Durchschnittsoptimalität unter den stationären Strategien	76
III.	Optimierung in einem semiregenerativen Entscheidungsmodell	
§8	Das Entscheidungsmodell	83
§9	Beweise zu §8	92
§10	Existenz durchschnittsoptimaler Strategien	101
§11	Abhängigkeit vom Startpunkt	110
IV.	Diskussion der Ergebnisse	
§12	Vergleich mit bekannten Resultaten	113
§13	M/G/1-Wartesysteme mit schaltbarem Bediener	120
§14	GI/M/c-Wartesysteme mit Kundenzulassung	129
Anhang		138
Symbole		142
Literatur		144

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536524_0012

EINLEITUNG

Die Theorie der Dynamischen Programmierung handelt von der Suche nach optimalen Strategien in mehrstufigen Entscheidungsverfahren. Ihr Ziel ist die Angabe von Bedingungen, die die Existenz einer optimalen Strategie sichern, und von Hilfsmitteln, die das Ausrechnen solcher optimalen Politiken ermöglichen. Ausgehend von der Optimalitätsgleichung werden iterative und Approximationsverfahren für die numerische Berechnung entwickelt. Bei speziellen Problemen versucht man, auf deren Struktur zurückzugreifen und zu zeigen, daß optimale Politiken unter geeignet strukturierten Politiken zu finden sind. Dadurch wird die Klasse von Politiken, in der optimiert werden muß, erheblich verkleinert.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Frage nach der Existenz von optimalen Politiken in semi-Markoffschen Entscheidungsprozessen. Ihre Beantwortung ist so abgefaßt, daß wir gleichzeitig Aussagen zur Optimalität von strukturierten Politiken erhalten. Wir demonstrieren unsere Resultate an zwei Beispielen aus der Theorie der Warteschlangen.

Zur Festlegung dessen, was "optimal" bedeuten soll, kann man unter verschiedenen Kriterien wählen. Thema dieser Arbeit sind die Durchschnittskosten. Ein anderes wichtiges Kriterium bei unendlichem Horizont - der Fall, der in dieser Arbeit ausschließlich behandelt wird - sind die erwarteten diskontierten Gesamtkosten. Für dieses Kriterium ist die Frage nach der Existenz von optimalen Politiken in sehr allgemeinem Rahmen geklärt (vgl. z.B. Hinderer (70), Schäl (75)). Sie ist gesichert, wenn gewisse Stetigkeits- und Kompaktheitsannahmen für die Ausgangsdaten erfüllt sind.

Diese Annahmen für die Einschritt- Übergangsgesetze reichen bei den Durchschnittskosten jedoch nicht aus. Hier sind das langfristige Verhalten und daher die Rekurrenzeigenschaften der zugrundeliegenden Prozesse entscheidend. Deren Abhängigkeit von den Strategien ist durch jene Bedingungen noch nicht genügend bestimmt. Diese Tatsache macht die Behandlung der Durchschnittskosten schwieriger, in mancher Hinsicht aber auch mathematisch interessanter.

Bei semi-Markoffschen Entscheidungsmodellen brauchen die Entscheidungszeitpunkte nicht - wie bei Markoffschen Modellen - fest vorgegeben zu sein (z.B. jeder Tag), sondern können selbst vom Zufall abhängen (z.B. Ankünfte von Kunden in einem Wartesystem). Wenn man diskontierte Kosten untersucht, läßt sich das relativ leicht mit Hilfe von verallgemeinerten Diskontfaktoren berücksichtigen. Ein semi-Markoffsches Modell kann so auf ein Markoffsches zurückgeführt werden. Das ist jedoch bei den Durchschnittskosten nicht ohne weiteres möglich. Grundidee dieser Arbeit ist es, ein für den Markoffschen Fall erprobtes Verfahren auf den Semi-Markoff-Fall zu übertragen.

Durchschnittskosten in einem Modell mit überabzählbarem Zustandsraum werden von Ross (68) behandelt. Er greift ein Ergebnis von Derman (66) auf und zeigt, wie aus der Gültigkeit der Optimalitätsgleichung die Existenz einer stationären optimalen Politik geschlossen werden kann. Ferner gibt er Bedingungen an, unter denen man die Optimalitätsgleichung für die Durchschnittskosten aus der für diskontierte Kosten ableiten kann. Tijms (75) und Rieder (79) im Anschluß an diesen Ansatz, Wijngaard (75, 77) mit einer neuen Methode, und andere Autoren formulieren Annahmen, unter denen durchschnittsoptimale Politiken existieren. Alle für den Fall eines überabzählbaren Zustandsraumes bisher gefundenen Bedingungen sind jedoch so stark, daß sie in Anwendungen nicht erfüllbar oder nur schwer nachzuweisen sind.

Gegenstand dieser Arbeit ist der abzählbare Fall. Für ihn liegen bereits befriedigende Ergebnisse zum Problem der Existenz von optimalen Politiken vor. Die Arbeit von Federgruen, Hordijk und Tijms (79) umfaßt die meisten von ihnen; wir verweisen auf die dort zitierte Literatur. Dem Vorgehen von Ross (68) folgend, zeigen Federgruen et al. (79) die Optimalitätsgleichung für die Durchschnittskosten mit Hilfe einer Folge von Optimalitätsgleichungen für diskontierte Kosten in einem Hilfsmodell. Die Bedingungen, die sie dafür benötigen, sind allgemein genug - im Gegensatz zu bislang üblichen Voraussetzungen -, daß sie in Anwendungen aus der Lagerhaltungs- und Warteschlangentheorie erfüllt sein können.

Insbesondere wird zugelassen, daß die Einschritt-Kosten und die erwarteten Rückkehrzeiten in einen ausgezeichneten Punkt unbeschränkt sind.

Die Bedingungen verallgemeinern solche von Hordijk (74). Sie können mit Hilfe von sogenannten Liapunoff-Funktionen formuliert werden. Entscheidend ist die Annahme, daß die erwartete Zeit und die erwarteten Kosten bis zum Eintritt in eine feste endliche Menge für alle Startpunkte beschränkte Funktionen der stationären Strategien sind. Zusätzlich wird verlangt, daß es für jede stationäre Strategie nur eine abgeschlossene Klasse der zugehörigen Markoffkette gibt.

Wenn die letztgenannte Voraussetzung erfüllt ist, können die Rekurrenzbedingungen von Federgruen et al. (79) nicht mehr wesentlich abgeschwächt werden. Jene Arbeit läßt jedoch unbeantwortet, in welcher Beziehung die genannten Bedingungen zu der Straffheitsbedingung stehen, die von Hordijk (71) für ein Markoffsches Modell eingeführt wurde und die für Wartesysteme besonders geeignet ist (vgl. Schäl (77b)). Darüberhinaus machen Federgruen et al. (79) auf einen prinzipiellen Nachteil ihres Ansatzes aufmerksam: Er ist nicht auf den Fall mehrerer ergodischer Klassen übertragbar. Sie vermuten, daß dafür möglicherweise Fixpunktmethoden oder lineare Programmierung benötigt werden.

Unsere Ergebnisse legen nahe, daß es im Semi-Markoff-Fall noch einen tieferen Grund für die Begrenztheit des Ansatzes gibt. Die Durchschnittkosten ψ, die Federgruen et al. (79) ihren Untersuchungen zugrunde legen, sind definiert als der Limes des Quotienten von erwarteten Kosten und erwarteter Zeit bis zum n-ten Schritt, wenn n gegen Unendlich strebt. Natürlicher, dem stetigen Zeitparameter angepaßter, ist es allerdings, die Durchschnittskosten zu definieren als den Limes Φ der erwarteten Kosten bis zur Zeit t dividiert durch t, wenn t gegen Unendlich strebt. Im Markoff-Fall sind beide Definitionen äquivalent. Im Semi-Markoff-Fall stimmen sie jedoch nur dann überein (für stationäre Strategien), wenn die zugrundeliegende Markoffkette nur eine ergodische Klasse

besitzt (vgl. Ross (70) und Bemerkung 5.13). Darüberhinaus hat Φ eine nützliche Eigenschaft, die ψ im Fall mehrerer ergodischer Klassen nicht aufweisen kann. Die Kosten ψ sind also schwerer zu interpretieren und in gewisser Weise der Struktur des Problems nicht angemessen.

Beide in Federgruen et al. (79) nicht beantworteten Probleme werden in dieser Arbeit gelöst. Die Bedingungen, die wir benötigen, werden von denen jener Arbeit und unter leicht überprüfbaren schwachen Zusatzvoraussetzungen auch von der Straffheitsbedingung in Hordijk (71) impliziert. Sie lassen mehrere ergodische Klassen zu. Auf diese Weise werden die meisten in der Literatur auftretenden Existenzaussagen verallgemeinert; vgl. Hordijk (71,74), Schäl (77), Wijngaard (79) und Federgruen et al. (79) (siehe §12).

Andererseits erhalten Federgruen et al. (79) in zweierlei Hinsicht bessere Ergebnisse. Erstens beweisen sie die Gültigkeit der Optimalitätsgleichung. Zweitens verwenden sie ein stärkeres Optimalitätskriterium: Sie zeigen die Existenz einer sogenannten stark optimalen Politik.

Unser Vorgehen folgt dem Ansatz von Hordijk (71,74) für den Markoff-Fall und schließt dessen Erweiterung von Schäl (77a) auf den Fall unbeschränkter Kosten ein. Dieser Ansatz läßt sich in drei Schritten beschreiben.

1. Für stationäre Politiken werden die Durchschnittskosten als Erwartungswert der Einschritt-Kosten bzgl. eines stationären Wahrscheinlichkeitsmaßes (W-Maßes) dargestellt. Dazu werden gewisse Rekurrenzannahmen gemacht.
2. Mit Hilfe von 1. wird gezeigt, daß die Durchschnittskosten unterhalb stetig von den stationären Politiken abhängen. Weil der Raum dieser Politiken als kompakt vorausgesetzt ist, wird das Minimum angenommen. Für diesen Schritt benötigt man, daß die stationären W-Maße und daher die mittleren Rückkehrzeiten stetig von den Übergangsmatrizen abhängen.
3. Im dritten Schritt wird bewiesen, daß die unter 2. gefundene

Politik unter allen, auch vergangenheitsabhängigen Strategien optimal ist. Dazu werden die Durchschnittskosten Φ durch diskontierte Kosten V_α so approximiert, daß gilt: Wenn die Diskontfaktoren α_n gegen Null und gleichzeitig die stationären Politiken f_n gegen f konvergieren, dann ist $\underline{\lim}\ \alpha_n V_{\alpha_n}(f_n) \geq \Phi(f)$. Mit Hilfe eines Abelschen Satzes und unter Ausnutzung der Tatsache, daß es für das diskontierte Kriterium stationäre optimale Politiken gibt, kann daraus die Behauptung gefolgert werden. Dieser Schritt erfordert keine Voraussetzungen, die über die in 1. und 2. genannten hinausgehen.

Wir untersuchen ein semiregeneratives Entscheidungsmodell, das etwas allgemeiner ist als das Standardmodell der Dynamischen Programmierung (vgl. Hinderer (70), Schäl (75), hier mit abzählbarem Zustandsraum). Wir lassen Strategien zu, die die vergangenen Entscheidungszeitpunkte explizit berücksichtigen. Weiter führen wir sogenannte Hilfspfade ein, sodaß bei stationären Strategien nicht semi-Markoffsche, sondern allgemeinere semiregenerative Prozesse vorliegen. Solche Prozesse wurden von Cinlar (69, 75), Schäl (70) und anderen Autoren eingehend untersucht. Schellhaas (75, 79) behandelt zum ersten Mal semiregenerative Prozesse, die mit einer Kostenstruktur versehen sind. Wir konstruieren unser Entscheidungsmodell als natürliche Erweiterung einer Familie von solchen Prozessen.

Die drei Schritte des oben angesprochenen Verfahrens lassen sich folgendermaßen auf unser Modell übertragen.

1. Mit Hilfe von stationären Maßen für semiregenerative Prozesse lassen sich die Durchschnittskosten als Erwartungswert über die Einschritt-Kosten darstellen. Dabei verallgemeinern wir ein Ergebnis von Schellhaas (79) (Satz 5.1). Die hier benötigten Bedingungen verlangen u.a., daß eine endliche Menge von positiv-rekurrenten Zuständen von jedem Startpunkt aus mit Wahrscheinlichkeit 1 erreicht werden kann.
2. Für die Unterhalbstetigkeit der Durchschnittskosten ist nach 1. die stetige Abhängigkeit der mittleren Rückkehrzeiten von den

stationären Strategien entscheidend (Satz 7.5). Dafür geben wir äquivalente und zwei hinreichende Bedingungen an (Sätze 6.18, 6.29, 6.31, 7.9 und 7.13).

3. Anders als im Markoff-Fall werden für die Aussage $\underline{\lim}\ \alpha_n V_{\alpha_n}(f_n) \geq \Phi(f)$ weitere Stetigkeitsannahmen für das Übergangsgesetz notwendig (Sätze 10.11 und 10.16). Die Durchschnittskosten können als Funktional der zugehörigen Markoffketten geschrieben werden. Daher müssen für die Unterhalbstetigkeit in 2. nur Voraussetzungen an die Markoffketten und an die erwarteten Verweilzeiten gestellt werden. Bei den diskontierten Kosten lassen sich hingegen das Übergangsgesetz für den nächsten Zustand und für die zugehörige Verweilzeit nicht voneinander trennen. Die zusätzliche Voraussetzung (siehe (10.3) und (10.4)) muß verschärft werden, wenn auch negative Kosten zugelassen sind (vgl. Bemerkung 10.14).

Auf diese Weise erhalten wir hinreichende Bedingungen für die Existenz von stationären optimalen Politiken (Satz 10.21). Im allgemeinen werden die optimale Politik und die optimalen Kosten vom Startpunkt abhängen. Wir zeigen, daß das nicht der Fall ist, wenn das Entscheidungsmodell ein sogenanntes rekurrentes System bildet (vgl. Bather (73), Hordijk (74); Satz 11.7 und Korollar 11.9).

Zu Beginn dieser Einleitung wurden zwei andere für Optimierungsprobleme wichtige Fragestellungen angesprochen: "Existieren strukturierte optimale Politiken?" und: "Wie können die optimalen Kosten und eine optimale Politik berechnet werden?" Hierauf bekommen wir Antworten, falls die entsprechenden Probleme für die zugehörigen diskontierten Kosten gelöst sind.

Gibt es strukturierte diskontiert-optimale Politiken und ist die Klasse der strukturierten Politiken abgeschlossen in der Menge der stationären Politiken, so enthält sie auch durchschnittsoptimale Politiken (Satz 10.21). Am Ende der Arbeit zeigen wir mit Hilfe dieses Resultats die Existenz von durchschnittsoptimalen "Kontrollgrenzpolitiken" für ein M/G/1-Wartesystem mit schaltbarem

Bediener (Satz 13.3) und die Existenz von durchschnittsoptimalen "monotonen Politiken" für ein GI/M/c-Wartesystem mit Kundenzulassung (Satz 14.17).

Zur Frage der Berechenbarkeit erhalten wir zwei Ergebnisse. Die optimalen Durchschnittskosten sind der Limes von αV_α^*, wenn α gegen Null geht und V_α^* die optimalen α-diskontierten Kosten bezeichnet (Satz 10.20). Ist α_n eine Nullfolge von Diskontfaktoren, so ist jeder Limes von α_n-optimalen Politiken f_n durchschnittsoptimal (Satz 10.22).

In Kapitel I stellen wir Tatsachen über semiregenerative Prozesse bereit. §1 folgt in Terminologie und Darstellung der Arbeit von Schäl (70). Einige Änderungen werden nötig, weil wir annehmen, daß der Prozeß zu einem Zeitpunkt $S_o \leq 0$ gestartet wird.

Das geschieht, damit wir in §2 Startmaße einführen können. Jedes Startmaß bestimmt ein W-Maß für die Beschreibung des gesamten Prozesses (Sätze 2.2, 2.10). Wir zeigen, wie die semiregenerative Eigenschaft zur Berechnung von Funktionalen des Prozesses ausgenutzt werden kann (Satz 2.11). Wichtiges Hilfsmittel für die Untersuchung des Rekurrenzverhaltens ist eine Formel für die Rückkehrzeiten in eine Teilmenge K, wenn die Rückkehrzeiten für eine Obermenge $J \supset K$ gegeben sind (Lemma 2.17).

In §3 zeigen wir, wie aus stationären Maßen für Markoffsche Erneuerungsprozesse (Pyke and Schaufele (66), McDonald (77)) solche für semiregenerative Prozesse gewonnen werden können (Satz 3.10). Wir beweisen, daß sie eindeutig bestimmt sind (Satz 3.15), und ziehen eine Verbindung zur Theorie der zufälligen markierten Punktfolgen (König und Matthes (63), Matthes (63); Bemerkung 3.21).

Kapitel II behandelt semiregenerative Prozesse mit Kosten. In §4 wird die Kostenstruktur eingeführt. Wir stellen die notwendigen Überlegungen zur Wohldefiniertheit an und beweisen eine Darstellung für die diskontierten Kosten (Satz 4.16).

Die Durchschnittskosten werden in §5 untersucht. Wir verallgemeinern einen Satz von Schellhaas (79), den wir ohne Beschränkt-

heitsvoraussetzungen an die Kosten beweisen können (Satz 5.1). Das ist möglich, weil wir nicht die von Cinlar (69, 75) entwickelte Theorie der Markoffschen Erneuerungsgleichungen anwenden, sondern die in Kapitel I bereitgestellten Eigenschaften semiregenerativer Prozesse direkt ausnutzen. Als Korollar erhalten wir die oben beschriebenen Aussagen zu den "Pseudo-Durchschnittskosten" ψ. Zwei weitere Sätze bezeichnen den Zusammenhang von diskontierten und Durchschnittskosten (Sätze 5.15 und 5.18).

In §6 geben wir äquivalente Bedingungen dafür an, daß die mittleren Rückkehrzeiten stetig von den stationären Strategien abhängen (Sätze 6.18, 6.29 und 6.31). Eine von ihnen verlangt die Unterhalbstetigkeit der Anzahl der rekurrenten Klassen und die Straffheit einer gewissen Familie von W-Maßen (siehe (6.25)). Letzteres steht in Zusammenhang mit einer Vermutung von Federgruen et al. (79), auf die wir in §12 eingehen. Alle genannten Bedingungen implizieren, daß die Anzahl der rekurrenten Klassen auf jeder zusammenhängenden Teilmenge von stationären Strategien konstant ist. Ähnliche Aussagen wurden im Falle eines endlichen Zustandsraumes von Schweitzer (68) bewiesen.

§7 behandelt die Abhängigkeit der Durchschnittskosten von den stationären Politiken. Wir geben hinreichende Bedingungen dafür an, daß sie unterhalb stetige Funktionen der stationären Politike sind (Satz 7.5). Die eine benutzt eine Liapunoff-Funktion (Satz 7.9), die andere ist auf den Fall zugeschnitten, wo eine "langsamste Politik" bestimmt werden kann (Satz 7.13).

Optimierung in der Klasse aller Strategien ist das Thema von Kapitel III. In §8 stellen wir das Entscheidungsmodell vor und geben einige Resultate über diskontierte Kosten an. Wir zeigen, wie sich unser Modell und das Standardmodell der Dynamischen Optimierung aufeinander beziehen lassen.

Die recht technische Konstruktion des Modells und einige Beweise zu §8 sind in §9 zu finden. Von eigenständigem Interesse ist der Satz 9.1, eine leichte Erweiterung eines Ergebnisses von Shiryaye

(78): Für einen beliebigen stochastischen Prozeß (X_t) und eine zugehörige Stoppzeit T ist die Prä-σ-Algebra A_T der Ereignisse bis zur Zeit T gleich der σ-Algebra, die von dem gestoppten Prozeß $(X_{T\wedge t})$ erzeugt wird.

§10 enthält die Hauptergebnisse, die oben vorgestellt wurden. Zu Beginn werden sämtliche Bedingungen aufgelistet, die bei Anwendungen zu überprüfen sind. Aussagen über strukturierte Politiken werden dadurch ermöglicht, daß die Sätze formuliert sind für beliebige kompakte Teilmengen der stationären Strategien, die ε-optimale Politiken für das diskontierte Kriterium enthalten.

In §11 wird untersucht, wann die optimalen Strategien und die optimalen Kosten vom Startpunkt unabhängig sind.

Kapitel IV dient der Diskussion und Illustration der Ergebnisse. In §12 erörtern wir die oben erwähnten Verbindungen zu den Resultaten anderer Autoren.

§13 behandelt das M/G/1-Wartesystem mit schaltbarem Bediener, das zuerst von Heyman (68) untersucht wurde. Wir übertragen die Ergebnisse von Langen (76), der rigorose Beweise für die Optimalität von Kontrollgrenzenpolitiken bei diskontierten Kosten gab, auf das Durchschnittskostenkriterium. Interessant ist dabei der Fall, in dem die Betriebs- und Umschaltkosten positiv, die Aufenthaltskosten aber gleich Null sind. Dann sind nämlich alle Kontrollgrenzenpolitiken suboptimal, und das Infimum der zugehörigen Auskommen wird von einer nicht-stationären Politik angenommen.

Unser zweites Beispiel in §14 ist ein GI/M/c-Wartesystem, bei dem die Anzahl der zugelassenen Kunden gesteuert werden kann. Ähnliche Systeme wurden von Lippman und Stidham (77) und von Stidham (78) untersucht. Wir zeigen, daß ein Ergebnis von Langen (79) über die Existenz monotoner Politiken im diskontierten Fall auch für die Durchschnittskosten gilt. Dabei kommt die in §7 dargestellte Bedingung mit einer "langsamsten Politik" zur Anwendung.

In einem Anhang stellen wir einige Konvergenzsätze und Sätze über Markoffketten in der von uns benötigten Form zusammen. Neu ist

dabei nur das Lemma A.14 über die stetige Abhängigkeit der Tabuwahrscheinlichkeiten von den Übergangsmatrizen. Mit ihm wird ein Resultat von Federgruen et al. (79) verallgemeinert.

Kapitel I SEMIREGENERATIVE PROZESSE

§1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Semiregenerative Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, daß sie einen eingebetteten Markoffschen Erneuerungsprozeß besitzen. Sie wurden von Schäl (70) "Markoffsche Erneuerungsprozesse mit Hilfspfaden" genannt. Unsere Darstellung und unsere Bezeichnungen folgen weitgehend der Arbeit von Schäl (70).

Im Unterschied zu jener Arbeit lassen wir zu, daß der erste Erneuerungspunkt vor dem Zeitpunkt 0 liegt. Das ermöglicht uns, in §3 eine Startverteilung zu finden, unter der der Prozeß stationär ist. In §2 behandeln wir das stochastische Verhalten eines semiregenerativen Prozesses. Insbesondere untersuchen wir Erneuerungs- und Rekurrenzeigenschaften. Die wesentlichen Definitionen und Bezeichnungen werden in §1 gegeben. Wir entwickeln das bekannte Hilfsmittel der θ-Operatoren (vgl. Dynkin (65)), das es gestattet, mit dem semiregenerativen Prozeß zusammenhängende Zufallsvariablen vorteilhaft darzustellen.

Es seien die folgenden Größen gegeben:

(a) ein Meßraum $(\Omega, \hat{\mathcal{A}})$;

(b) eine Familie meßbarer Funktionen $(Z_t)_{t\geq 0}$ von $(\Omega, \hat{\mathcal{A}})$ in einem metrischen Raum $(\mathcal{Z}, \mathcal{K})$ mit rechtsseitig stetigen Pfaden; dabei sei $\mathcal{K}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathcal{Z}$;

(c) eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von meßbaren Funktionen von $(\Omega, \hat{\mathcal{A}})$ in $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ mit $S_0 \leq 0 < S_1 < S_2 < \ldots < S_\infty := \lim S_n$;

(d) eine Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von meßbaren Funktionen von $(\Omega, \hat{\mathcal{A}})$ in einen abzählbaren Zustandsraum I;

(e) eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen (W-Maßen) $(P_i)_{i\in I}$ auf $(\Omega, \hat{\mathcal{A}})$.

Für $t \geq 0$ definieren wir die folgenden Größen:

$n(t) := \sup\{m \in \mathbb{N}_0 \mid S_m \leq t\}$

$U_t := t - S_{n(t)}$

$$V_t := \begin{cases} S_{n(t)+1} - t & t < S_\infty \\ \infty & t \geq S_\infty \end{cases}$$

$$X_t := (Z_t, U_t, Y_{n(t)})$$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}) := (\mathcal{Z} \times \mathbb{R}_+ \times I,\ \mathcal{K} \otimes \mathcal{B}_+^1 \otimes \mathcal{P}(I))$$

Dabei nehmen wir an, daß X_t für $t \geq S_\infty$ gleich einer Konstanten ist, die kein Element von $\mathcal{X}$ ist. Insbesondere sei $Y_\infty := \Delta \notin I$. Ferner soll X_t auch für $t < 0$ definiert sein und zwar so, daß für $t \in [S_o, 0)$ $Z_t \in \mathcal{Z}$ und Z_t rechtsseitig stetig ist und daß $U_t = t - S_o$ und $Y_{n(t)} = Y_o$. Für $t < S_o$ sei $X_t \notin \mathcal{X}$. Diese Konventionen sind rein technischer Natur. Relevant ist nur das Verhalten von X_t für $t \in [0, S_\infty)$.

Die Folge (S_n) ist die Folge der Erneuerungspunkte, (Y_n) die Folge der Zustände. Weiter ist $n(t)$ der letzte Erneuerungspunkt vor der Zeit t, U_t die Zeit seit dem letzten Erneuerungspunkt und V_t die Zeit bis zum nächsten Erneuerungspunkt.

Wir definieren die folgenden σ-Algebren:

$$A := \sigma(X_t,\ t \geq 0)$$
$$A_t := \sigma(X_s,\ s \in [0,t])$$
$$\sigma_n := \sigma(S_o, Y_o, \ldots, S_n, Y_n)$$

Definition:

Das Tupel $((\Omega, A), \mathcal{Z}, I, (Z_t), (S_n, Y_n), (P_i))$ heißt ein semiregenerativer Prozeß, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(SR1) $\forall i \in I \quad P_i\{S_o = 0,\ Y_o = i\} = 1$

$\forall m,n \in \mathbb{N},\ t_k \geq 0,\ B_k \in \mathcal{B} \quad (1 \leq k \leq m),\ i \in I$

$$P_i\{X_{S_n+t_k} \in B_k \ (1 \leq k \leq m) \mid \sigma_n\} = P_{Y_n}\{X_{t_k} \in B_k \ (1 \leq k \leq m)\}[P_i$$

(SR2) $\forall \omega \in \Omega,\ t \in [S_o(\omega), S_\infty(\omega)) \exists \omega' \in \Omega \quad \forall u \geq S_o(\omega')$

$$X_u(\omega') = X_{t+u}(\omega) \ .$$

Die Eigenschaft (SR2)

Bemerkung 1.1

Die Bedingung (SR2) ist äquivalent zu

(1.2) $\forall n \in \mathbb{N}_o, \omega \in \Omega, t \in [0, S_{n+1}(\omega) - S_n(\omega)) \exists \omega' \in \Omega \quad \forall u \geq -t$
$X_{S_n(\omega)+t+u}(\omega) = X_u(\omega')$.

Das zeigt den Zusammenhang zu Bedingung (E2) in Schäl (70), wo (1.2) für $t = 0$ gefordert wird. ◇

Bemerkung 1.3

Die Bedingung (SR2) kann immer erfüllt werden durch Vergrößerung von Ω um eine Nullmenge, wobei die Eigenschaft (SR1) erhalten bleibt.

Beweis (vgl. Dynkin (65), S. 79; Schäl (69), S. 85 f.):

Definiere $\Omega_1 := \{(m,\omega,s) \in \mathbb{N}_o \times \Omega \times \mathbb{R}_+ | s < S_{m+1}(\omega) - S_m(\omega)\}$;
$\tilde{\Omega} := \Omega \cup \Omega_1$; $\hat{\tilde{A}} := \{A | A\Omega \in \hat{A}\}$; $P_i(A) := P_i(A\Omega)$ $(i \in I, A \in \hat{\tilde{A}})$;

$$\tilde{X}_u(\tilde{\omega}) := \begin{cases} X_u(\tilde{\omega}) & \tilde{\omega} \in \Omega,\ u \geq S_o(\tilde{\omega}) \\ X_{S_m(\omega)+t+u}(\omega) & \tilde{\omega} = (m,\omega,t) \in \Omega_1,\ u \geq -t; \end{cases}$$

$(\tilde{Z}_u, \tilde{U}_u, \tilde{Y}_{\tilde{n}(u)}) := \tilde{X}_u$;

$$\tilde{S}_o(\tilde{\omega}) := \begin{cases} S_o(\tilde{\omega}) & \tilde{\omega} \in \Omega \\ -t & \tilde{\omega} = (m,\omega,t) \in \Omega_1; \end{cases}$$

$\tilde{S}_{n+1}(\tilde{\omega}) := \inf\{u | u > \tilde{S}_n(\tilde{\omega}),\ \tilde{U}_u(\tilde{\omega}) = 0\}$ $(n \in \mathbb{N}_o)$;
$\tilde{Y}_n := \tilde{Y}_{\tilde{n}(\tilde{S}_n)}$ $(n \in \mathbb{N}_o)$; $\tilde{A} := \sigma(\tilde{X}_u, u \geq 0)$.

Damit ist ein neues Tupel $((\tilde{\Omega},\tilde{A}), \tilde{\vartheta}, I, (\tilde{Z}_t), (\tilde{S}_n, \tilde{Y}_n), (\tilde{P}_i))$ definiert. Es gilt $\tilde{S}_o \leq 0 < \tilde{S}_1 < \tilde{S}_2 < \ldots$ wegen

(1.4) $\tilde{S}_n(\tilde{\omega}) = S_{n+m}(\omega) - S_m(\omega) - s$ $(\tilde{\omega} = (m,\omega,s) \in \Omega_1,\ n \in \mathbb{N}_o)$.

Diese Beziehung läßt sich durch Induktion beweisen.
Die Funktionen $\tilde{Z}_t$, $\tilde{S}_n$, $\tilde{Y}_n$ sind $\hat{\tilde{A}}$-meßbar, weil ihre Einschränkungen auf Ω gleich den ursprünglichen Z_t, S_n, Y_n sind.
Die Bedingung (SR1) ist weiter erfüllt. Das ist klar für die erste Aussage in (SR1) und folgt für die zweite aus

$$\tilde{P}_i(\tilde{A} \cap \{\tilde{X}'_{\tilde{S}_n+t_k} \in B_k\}) = P_i(\tilde{A} \cap \{\tilde{X}_{\tilde{S}_n+t_k} \in B_k\} \cap \Omega)$$
$$= \int_{\tilde{A}\Omega} P_i(\{\tilde{X}_{\tilde{S}_n+t_k} \in B_k\} \cap \Omega | \sigma_n) dP_i$$
$$= \int_{\tilde{A}\Omega} P_{Y_n}\{X_{t_k} \in B_k\}\, dP_i$$
$$= \int_{\tilde{A}\Omega} P_{\tilde{Y}_n}(\{\tilde{X}_{t_k} \in B_k\} \cap \Omega)\, dP_i$$
$$= \int_{\tilde{A}} \tilde{P}_{\tilde{Y}_n}\{\tilde{X}_{t_k} \in B_k\}\, d\tilde{P}_i$$

für $\tilde{A} \in \tilde{\sigma}_n = \sigma(\tilde{S}_o, \tilde{Y}_o, \ldots, \tilde{S}_n, \tilde{Y}_n) \subset \{\tilde{B} | \tilde{B}\Omega \in \sigma_n\}$.

Die Beziehung (1.2) und daher (SR2) ist jetzt auch erfüllt. Sei nämlich $n \in \mathbb{N}_o, \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, $t \in [0, \tilde{S}_{n+1}(\tilde{\omega}) - \tilde{S}_n(\tilde{\omega}))$. Falls $\tilde{\omega} \in \Omega$, definiere $\tilde{\omega}' := (n, \tilde{\omega}, t) \in \Omega_1$. Es ist $\tilde{X}_u(\tilde{\omega}') = X_{S_n(\tilde{\omega})+t+u}(\tilde{\omega})$ $= \tilde{X}_{\tilde{S}_n(\tilde{\omega})+t+u}(\tilde{\omega})$ $(u \geq -t)$. Falls $\tilde{\omega} = (m, \omega, s) \in \Omega_1$, definiere $\tilde{\omega}' := (n+m, \omega, t) \in \Omega_1$. Es ist $\tilde{X}_u(\tilde{\omega}') = X_{S_{n+m}(\omega)+t+u}(\omega)$ $= X_{S_m(\omega)+s+\tilde{S}_n(\tilde{\omega})+t+u}(\omega) = \tilde{X}_{\tilde{S}_n(\tilde{\omega})+t+u}(\tilde{\omega})$ $(u \geq -t)$ nach (1.4). ◇

Meßbarkeitsfragen

Für eine Teilmenge $K \subset I$ definieren wir $\tau_{K0} := 0$, $\tau_{K,n+1} := \inf\{m \in \mathbb{N} | m > \tau_{Kn}, Y_m \in K\}$, $T_{Kn} := S_{\tau_{Kn}}$, $\nu_K(n) := \sup\{m \in \mathbb{N}_o | \tau_{Km} \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N}_o)$. Es bezeichnet also τ_{Kn} den Index des Erneuerungspunktes, bei dem der n-te Besuch in der Menge K stattfindet (wobei Y_o nicht berücksichtigt wird). Entsprechend ist T_{Kn} der Zeitpunkt des n-ten Besuchs in K und $\nu_K(n)$ die Anzahl der Besuche in K bis zum n-ten Erneuerungspunkt. Ist $K = \{j\}$, so schreiben wir τ_{jn}, T_{jn}, $\nu_j(n)$ anstelle von τ_{Kn}, T_{Kn}, $\nu_K(n)$ $(n \in \mathbb{N}_o, j \in I)$.

Es sei weiter $N_j(t) := \sup\{n \in \mathbb{N}_o | T_{jn} \leq t\} = \nu_j(n(t))$ $= \sum_{m=1}^{\infty} [Y_m = j, S_m \leq t]$ die Anzahl der Besuche in $j \in I$ bis zur Zeit $t \geq 0$.

Das folgende Lemma wird in §3 benötigt.

Lemma 1.5

$$N_j(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{2^m} [Y_{n(k\cdot 2^{-m}\cdot t)} = j,\ U_{k\cdot 2^{-m}\cdot t} < 2^{-m}\cdot t](j \in I,\ t \geq 0).$$

Die angegebene Folge ist monoton steigend.

Beweis:

Nach Definition ist $N_j(t)$ die Anzahl der $n \in \mathbb{N}$ mit $Y_n = j$ und $S_n \leq t$. Man überlegt sich leicht, daß die angegebene Summe für festes $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl der n aus der folgenden Menge ist:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n = j,\ S_n \leq t,\ \exists k \in \mathbb{N}\ S_n \leq k\cdot 2^{-m}\cdot t < S_{n+1}\}\ .$$

Daraus folgen beide Behauptungen. ◇

Bemerkung 1.6.

Aus der angegebenen Darstellung folgt, daß $N_j(t)$ A_t-meßbar ist. Wegen der Beziehung

$$S_n \leq t \Leftrightarrow n \leq n(t) = \sum_j N_j(t)$$

beweist dies auch, daß S_n eine Stoppzeit für den (X_t)-Prozeß ist $(n \in \mathbb{N})$. Vgl. Schäl (70), Bemerkung (ii), S. 1606. ◇

Bemerkung 1.7.

Der Prozeß (X_t) hat rechtsseitig stetige Pfade und ist daher stark meßbar (d.h. $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ ist meßbar) (Dynkin (65), S. 98). Daher ist auch X_{S_n+t} $(n \in \mathbb{N}_o)$ stark meßbar auf $\{(t,\omega) \mid S_n(\omega) + t \geq 0\}$ und für festes $t \geq 0$ A-meßbar auf $\{\omega \mid S_n(\omega) + t \geq 0\}$. Insbesondere ist Y_n A-meßbar $(n \in \mathbb{N}_o)$. Es gilt sogar: Für jede A-meßbare Funktion $\tau\colon \Omega \to \mathbb{N}_o \cup \{\infty\}$ ist $X_{S_\tau+t}$ A-meßbar auf $\{S_\tau + t \geq 0\}$. Wegen $X_t \notin \mathfrak{X}$ für $t \geq S_\infty$ gilt für $B \in \mathfrak{b}$, $t \geq 0$

$$\{X_{S_\tau+t} \in B\} \subset \{\tau < \infty\} =: \Omega_\tau\ ,$$

$$\{X_{S_\tau+t} \notin \mathcal{K}\} \supset \{\tau = \infty\}.$$

Bemerkung 1.8 (vgl. Schäl (70), Bemerkung (v), S. 1606)

Ersetzt man Z_t durch $Z'_t := (Z_t, Y_{n(t)}, Y_{n(t)+1}, U_t, V_t)$, so erhält man wieder einen semiregenerativen Prozeß (Beweis mit Hilfe von Satz 2.11). Daher können wir bei Bedarf annehmen, daß Z_t $(Y_{n(t)}, Y_{n(t)+1}, U_t, V_t)$ enthält. ◇

Die Gültigkeit der Annahmen (SR1) und (SR2) wird in der gesamten Arbeit vorausgesetzt. Zwei weitere Generalannahmen werden im nächsten Paragraphen nach Lemma 2.22 formuliert.

θ-Operatoren

Bei der Einführung der θ-Operatoren folgen wir weiter Schäl (70). Einige Modifikationen ergeben sich wegen $S_o \leq 0$. Aufgrund unserer stärkeren Bedingung (SR2) (vgl. Bem. 1.1) können auch Formeln für θ^t bewiesen werden. Vgl. auch Dynkin (65), Abschnitt 3.5.

Es sei $\Phi := \{((s_n),\phi) | s_o < s_1 < \ldots, \phi: [s_o,\infty) \to \mathcal{K} \cup (\mathcal{Z} \times \mathbb{R}_+ \times \{\Delta\})\}$ und $X: \Omega \to \Phi$ definiert durch $X(\omega) := ((S_n(\omega)), u \to X_u(\omega))$. Das Mengensystem $\mathcal{A}^* := X^{-1}(\mathfrak{P}(\Phi))$ ist abgeschlossen unter beliebiger Schnitt- und Vereinigungsbildung und bzgl. Komplementbildung. Es umfaßt $\mathcal{A}$.

Sei $\psi_o \in \Phi \setminus X(\Omega)$ und definiere für $t \in \mathbb{R}$ den Verschiebeoperator $c_t: \Phi \to \Phi$ durch $c_t((s_n),\phi) := ((s_{\max\{m|s_m \leq t\}+n} - t)_{n\in\mathbb{N}_o}$, $u \to \phi(t+u))$ für $s_o \leq t < \lim s_n$, und $:= \psi_o$ sonst. Damit definiere $\theta^t: \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ als Hintereinanderschaltung

$$\theta^t := X^{-1} \circ c_t^{-1} \circ X.$$

Für $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{A}^*$ gilt

(1.9) $\theta^t A = \{\omega | \exists \omega' \in A \quad \forall u \geq S_o(\omega') \; X_u(\omega') = X_{t+u}(\omega)\}$.

Dabei beachte man, daß für $\omega,\omega' \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$ gilt

(1.10) $\forall u \geq S_o(\omega')\quad X_u(\omega') = X_{t+u}(\omega) \Rightarrow$
$S_o(\omega) \leq t < S_\infty(\omega)$ und $S_n(\omega') = S_{n(t)+n}(\omega) - t \quad (n \in \mathbb{N}_o)$.

Man hat für beliebe Mengen A_α, A, $A' \in \mathcal{A}^*$, $t \in \mathbb{R}$

(1.11) $\theta^t\Omega = \{S_o \leq t < S_\infty\} =: \Omega^t$, $\theta^t \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha \theta^t A_\alpha$,
$\theta^t(A \setminus A') = \theta^t A \setminus \theta^t A'$, $\theta^t \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha \theta^t A_\alpha$.

Weiter gilt

(1.12) $\theta^s\theta^t A = \Omega^s \cap \{U_s + t \geq 0\} \cap \theta^{s+t} A \quad (s,t \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{A}^*)$.

Die Formeln (1.11) folgen aus der Definition von θ^t, und (1.12) läßt sich mit Hilfe von (1.9) und (SR2) beweisen.
Jetzt können die folgenden Formeln bewiesen werden.

(1.13) $\theta^t\{X_u \in B\} = \{X_{t+u} \in B, U_t \geq -u\}\Omega^t \quad (t,u \in \mathbb{R}, B \subset \mathcal{X})$

(1.14) $\theta^t\{S_n \leq u\} = \{S_{n(t)+n} - t \leq u\}\Omega^t \quad (t,u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_o)$

(1.15) $\theta^t\{X_{S_n+u} \in B\} = \{X_{S_{n(t)+n}+u} \in B\}\Omega^t \quad (t\in\mathbb{R}, u\geq 0, n\in\mathbb{N}_o, B\subset\mathcal{X})$

(1.16) $\theta^t\{Y_n = j\} = \{Y_{n(t)+n} = j\}\Omega^t \quad (t\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}_o, j\in I)$

(1.17) $\{t < S_1\} \cap \theta^t\{S_n \leq u\} = \{S_n - t \leq u,\ S_o \leq t < S_1\}$
$(t,u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_o)$

(1.18) $\{t < S_1\} \cap \theta^t\{X_{S_n+u} \in B\} = \{X_{S_n+u} \in B,\ S_o \leq t < S_1\}$
$(t\in\mathbb{R}, u\geq 0, n\in\mathbb{N}_o, B\subset\mathcal{X})$

(1.19) $\{t < S_1\} \cap \theta^t\{Y_n = j\} = \{Y_n = j,\ S_o \leq t < S_1\}$
$(t\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}_o, j\in I)$

Beweis:

Unter Verwendung von (1.10) folgen (1.13) und (1.14) aus (1.9) und (SR2). Mit Hilfe von (1.11) folgt (1.15) aus (1.13) und (1.14). Ein Spezialfall davon ist (1.16). Schließlich ergeben sich (1.17) bis (1.19) aus (1.14) bis (1.16). ◇

Definiere jetzt für $n \in \mathbb{N}_o$, $A \in \mathcal{A}^*$, $\tau: \Omega \to \mathbb{N}_o \cup \{\infty\}$

$$\theta_n A := \cup_{t\in\mathbb{R}} \{S_n = t\} \cap \theta^t A ,$$
$$\theta_\tau A := \cup_{n\in\mathbb{N}_o} \{\tau = n\} \cap \theta_n A .$$

Als Korollar zu (1.11) und (1.12) haben wir

$$\theta_\tau \Omega = \Omega_\tau \quad , \quad \theta_\tau \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha \theta_\tau A_\alpha ,$$
$$\theta_\tau (A \setminus A') = \theta_\tau A \setminus \theta_\tau A' \quad , \quad \theta_\tau \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha \theta_\tau A_\alpha ,$$
$$\theta_m \circ \theta_n = \theta_{m+n} . \quad (m,n \in \mathbb{N}_o) .$$

Diese Beziehungen werden ohne weitere Erwähnung verwendet.

Für jede A^*-meßbare Funktion f lassen sich Funktionen $\theta^t f$ und $\theta_\tau f$ auf Ω^t bzw. auf Ω_τ definieren durch $\{\theta^t f = a\} := \theta^t\{f = a\}$ und $\{\theta_\tau f = a\} := \theta_\tau\{f = a\}$. Die Formeln (1.13) bis (1.19) implizieren für $t \in \mathbb{R}$, $u \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_o$, $\tau: \Omega \to \mathbb{N}_o \cup \{\infty\}$:

(1.20) $\theta_\tau X_u = X_{S_\tau + u}$

(1.21) $\theta_\tau S_n = S_{\tau+n} - S_\tau$

(1.22) $\theta_\tau Y_n = Y_{\tau+n}$

(1.23) $\theta_\tau n(u) = n(S_\tau + u) - \tau$

(1.24) $\theta^t X_u = X_{t+u}$

(1.25) $\theta^t S_n = S_n - t$ auf $\{S_o \leq t < S_1\}$

(1.26) $\theta^t Y_n = Y_n$ auf $\{S_o \leq t < S_1\}$

Weitere Eigenschaften der θ-Operatoren sind

(1.27)
$$\theta_\tau [A] = [\theta_\tau A] , \quad \theta_\tau f_m \to \theta_\tau f ,$$
$$\theta_\tau F \circ (f,g) = F \circ (\theta_\tau f, \theta_\tau g), \; f \leq g \Rightarrow \theta_\tau f \leq \theta_\tau g .$$

Hier ist $A \in A^*$, f_m, f, g A^*-meßbar mit $f_m \to f$ und F eine beliebige meßbare Abbildung. Entsprechende Formeln gelten für θ^t. Diese Eigenschaften werden ohne weitere Erwähnung verwendet.

Für die oben definierten Größen τ_{Kn}, T_{Kn} und $N_j(t)$ beweisen wir abschließend die folgenden Beziehungen. Dabei sei $t \in \mathbb{R}$, $u \geq 0$,

$n \in \mathbb{N}_0$, $j \in I$, $K \subset I$ und $\tau: \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

(1.28) $\theta_\tau \tau_{Kn} = \tau_{K,n+\nu_K(\tau)} - \tau$

(1.29) $\theta_\tau T_{Kn} = T_{K,n+\nu_K(\tau)} - S_\tau$

(1.30) $\theta_\tau N_j(u) = N_j(S_\tau+u) - \nu_j(\tau) = N_j(S_\tau+u) - N_j(S_\tau)$

(1.31) $\theta^t N_j(u) = N_j(t+u) - N_j(t)$

Beweis:

Wie schon bei den Beziehungen (1.20) bis (1.24) gelten die Formeln auf Ω_τ bzw. auf Ω^t. Formel (1.28) wird durch Induktion bewiesen. Der Induktionsanfang $\theta_\tau \tau_{K0} = 0 = \tau_{K,\nu_K(\tau)} - \tau$ ist klar. Gilt (1.28) für $n \in \mathbb{N}_0$, so ist mit (1.22)

$$\begin{aligned}\theta_\tau \tau_{K,n+1} &= \inf\{m \mid m > \theta_\tau \tau_{Kn}, \theta_\tau Y_m \in K\} \\ &= \inf\{m \mid \tau+m > \tau_{K,n+\nu_K(\tau)}, Y_{\tau+m} \in K\} \\ &= \tau_{K,n+1+\nu_K(\tau)} - \tau.\end{aligned}$$

Formel (1.29) folgt aus (1.28) mit (1.21). Sie impliziert (1.30) nach Definition von $N_j(u)$. Schließlich folgt (1.31) aus (1.14) und (1.16). ◇

§2 Startmaße, Erneuerungs- und Rekurrenzverhalten

In diesem Paragraphen konstruieren wir zunächst zu vorgegebenen "Startmaßen" μ auf $I \times \mathbb{R}_+$ ein Maß P_μ auf (Ω,A). Es hat zu den Zeitpunkten S_n dieselben "Übergangswahrscheinlichkeiten" wie die (P_i). Die Verteilung von (Y_o,U_o) unter P_μ ist jedoch gleich dem vorgegebenen μ. Anschließend beweisen wir zwei wichtige Sätze (Satz 2.10 und Satz 2.11), mit deren Hilfe Erwartungswerte von Funktionalen des semiregenerativen Prozesses berechnet werden können. Wir zeigen, daß der Prozeß eine eingebettete Markoffkette (EMK) besitzt und führen damit zusammenhängende Standardbezeichnungen ein. Am Ende des Paragraphen stehen einige Lemmata über Rückkehrzeiten.

Startmaße

Wir benötigen das folgende Lemma.

Lemma 2.1.

$$A = \sigma(\{\{X_{S_o+t} \in B,\ S_o + t \geq 0\} \mid t \geq 0,\ B \in \mathfrak{B}\} \cup \{\{S_o \leq -r\} \mid r \in \mathbb{R}_+\})$$

Beweis:

"$\supset$": Diese Inklusion folgt aus Bemerkung 1.7 und $S_o = -U_o$.

"$\subset$": Die rechte Seite sei mit A' bezeichnet. Es genügt, für alle abgeschlossenen Teilmengen B des metrischen Raumes $\mathfrak{X}$ und für alle $t \geq 0$ zu zeigen, daß $\{X_t \in B\} \in A'$. Bezeichnet $B(B,\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ die abgeschlossene ε-Umgebung von B, so ist $\{X_t \in B\} = \{\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\ \exists \delta \in \mathbb{Q}^+\ \forall u \in (t,t+\delta) \cap \mathbb{Q}\ \ X_u \in B(B,\varepsilon)\}$ wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von X_t. Nun gilt aber

$$\forall u \in (t,t+\delta) \cap \mathbb{Q} \quad X_u \in B(B,\varepsilon) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k > 1/\delta\ \exists n \in \mathbb{N}_o\ \forall s \in (t+(n+1)/k, t+n/k+\delta) \cap \mathbb{Q}$$

$$S_o \in (-(n+1)/k, -n/k] \text{ und } X_{S_o+s} \in B(B,\varepsilon),\ S_o + s \geq 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.◇

Definiere für $i \in I$, $t \geq 0$ $\quad H_i(t) := P_i\{S_1 \leq t\}$, $\lambda_i := \sup\{t \mid H_i(t) < 1\}$

Somit ist also H_i die Verteilung des ersten Erneuerungspunktes unter P_i, und H_i ist auf $[0,\lambda_i]$ konzentriert.

Satz 2.2

Sei μ ein Maß auf $I \times \mathbb{R}_+$, sodaß für $i \in I$, $x < \lambda_i$ gilt: $\mu(i,x) := \mu(\{i\} \times [0,x]) < \infty$ und $\mu(\{i\} \times [\lambda_i,\infty)) = 0$. Dann existiert genau ein σ-endliches Maß P_μ auf A mit

(2.3) $P_\mu^{(Y_0,U_0)} = \mu$;

(2.4) $P_\mu\{X_{S_0+t_k} \in B_k \ (1 \le k \le m) | \sigma_0\} = \alpha(Y_0,U_0)$ $[P_\mu]$

auf $\{S_0 \ge \max\{-t_k | 1 \le k \le m\}\}$; dabei ist für $i \in I$, $t < \lambda_i$

$\alpha(i,t) := P_i\{X_{t_k} \in B_k \ (1 \le k \le m) | t < S_1\}$ $(m \in \mathbb{N}$, $t_k \ge 0$, $B_k \in \mathfrak{B}$ $(1 \le k \le m))$.

Für P_μ gilt

(2.5) $P_\mu\{X_{S_n+t_k} \in B_k \ (1 \le k \le m) | \sigma_n\} = P_{Y_n}\{X_{t_k} \in B_k \ (1 \le k \le m)\}[P_\mu]$

$(m,n \in \mathbb{N}$, $t_k \ge 0$, $B_k \in \mathfrak{B}$ $(1 \le k \le m))$;

(2.6) $P_\mu(A) = \sum_{i \in I} \int_0^\infty \mu(i,dt) P_i(\theta^t A | \{t < S_1\})$

$= \sum_{i \in I} \int_0^\infty \mu(i,dt)(1-H_i(t))^{-1} P_i(\{t < S_1\} \cap \theta^t A)$ $(A \in A)$.

Genau dann, wenn μ ein W-Maß ist, ist auch P_μ ein W-Maß.

Bemerkung 2.7

Für $\alpha(Y_0,U_0)$ schreiben wir künftig abkürzend $P_{Y_0}\{X_{t_k} \in B_k \ (1 \le k \le m) | U_0(.) < S_1\}$. Die Klammern "(.)" deuten also an, daß das W-Maß auf die betreffende Größe nicht angewendet werden soll. Ähnlich verfahren wir auch mit Erwartungswertoperatoren, die nicht auf alle hinter ihnen stehenden Variablen wirken sollen. In (2.6) beachte $\infty \cdot 0 := 0$. ◇

Beweis von Satz 2.2:

Zum Beweis der Existenz von P_μ definiere P_μ durch (2.6). Dazu muß gezeigt werden:

a) $\{t < S_1\} \cap \theta^t A \in \mathcal{A}$;

b) $t \to P_i(\{t < S_1\} \cap \theta^t A)$ ist $\mathcal{B}_+^1$-meßbar ;

c) Das so definierte P_μ ist ein σ-endliches Maß.

Die Menge der A, für die a) und b) gelten, bilden nach (1.11) einen σ-Körper. Nach Lemma 2.1 reicht es daher, a) und b) für $A = \{X_{S_o+t} \in B,\ S_o + t \geq 0\}$ oder $A = \{S_o \leq -r\}$ zu zeigen. Das folgt mit Hilfe der Formeln (1.11), (1.17) und (1.18), Lemma 2.1 und mit dem Satz von Fubini. Aussage c) folgt jetzt aus (1.11). Daß das so definierte P_μ (2.3) bis (2.5) erfüllt, kann mit Hilfe von (1.11), (1.17) - (1.19) aus (SR1) geschlossen werden.

Ist umgekehrt P_μ mit (2.3) und (2.4) gegeben, so genügt es, (2.6) zu zeigen. Für $A = \{X_{S_o+t} \in B,\ S_o + t \geq 0\}$ oder $A = \{S_o \leq -r\}$ folgt dies mit (1.11), (1.17) und (1.18) aus (2.3) und (2.4). Nach Lemma 2.1 gilt es dann sogar für alle $A \in \mathcal{A}$.◇

Bemerkung 2.8.

Mit Hilfe von Satz 2.2 kann man also zu jeder "sinnvollen" Startverteilung μ für (Y_o, U_o) ein W-Maß auf $\mathcal{A}$ konstruieren, dessen "Übergangswahrscheinlichkeiten an den Zeiten S_n" nach (2.4) und (2.5) durch die P_{Y_n} gegeben sind. Daher beschreibt P_μ denselben Prozeß, der eben nur anders gestartet wurde. Das Wort "sinnvoll" bezieht sich darauf, daß μ nicht solchen Mengen $\{Y_o = i,\ S_o \leq -r\}$ positives Maß zuordnen darf, von denen aus gemäß der P_i $S_1 > 0$ nicht mehr möglich ist.

Die anschauliche Vorstellung bei der Konstruktion ist die, daß der Prozeß (X_t) bereits zur Zeit $S_o \leq 0$ beginnt und sich von S_o ab genauso verhält wie von den Zeitpunkten S_n ab ($n \in \mathbb{N}$). In (2.4) ist rechts eine bedingte Wahrscheinlichkeit zu schreiben und nicht

der zu (2.5) analoge Ausdruck, weil zum Zeitpunkt S_0 relativ mehr Informationen vorliegen als zu den Zeitpunkten S_n ($n \in \mathbb{N}$). Die Zeitspanne bis zum nächsten Erneuerungspunkt ist nicht nur > 0, sondern sogar $> -S_0 = U_0$. ◇

Bemerkung 2.9.

Gilt für das W-Maß μ $P_\mu\{U_0 = 0, Y_0 = i\} = 1$ für ein $i \in I$, so ist nach (2.6) $P_\mu = P_i$.

In Satz 2.2 wurden die Eigenschaften (2.3) - (2.5) von P_μ aus (SR1) abgeleitet. Sind umgekehrt P_μ und die P_i ($i \in I$) gegeben, so daß (2.3) - (2.5) gelten, und hat man zusätzlich

$$\forall i \in I \quad \exists n \in \mathbb{N} \qquad P_\mu\{Y_n = i\} > 0 \quad ,$$

so kann man für die P_i die Bedingungen in (SR1) nachweisen (vgl. Schäl (70), Bemerkung (iv), S. 1606). ◇

Definition.

Ein Maß μ wie in Satz 2.2 nennen wir ein Startmaß.

Das Erneuerungsverhalten

Die Formeln (2.5) und (2.6) lassen sich auf A-meßbare Funktionen f übertragen. Dazu bezeichnen wir mit E_i und E_μ die zu P_i und P_μ gehörigen Erwartungswertoperatoren. Ferner sei $\sigma_\tau := \{A \mid A \in \sigma(S_0, Y_0, S_1, Y_1, \ldots), A\{\tau = n\} \in \sigma_n \ (n \in \mathbb{N}_0)\}$.

Satz 2.10.

Sei μ ein Startmaß und f eine A-meßbare, P_μ-quasi-integrierbare Funktion von Ω nach $\overline{\mathbb{R}}$. Dann ist $\theta^t f$ meßbar, und es gilt

$$E_\mu f = \sum_{i \in I} \int_0^\infty \mu(i, dt)\, E_i[\theta^t f \mid t < S_1] \ .$$

Beweis:

Die Behauptung folgt mit Hilfe des Beweisprinzips für Integrale (Hinderer (72), S. 110 f.) aus (2.6) und (1.27). ◇

Satz 2.11 (Schäl (70), Theorem 5.1)

Sei μ ein Startmaß und f eine A-meßbare, P_μ-quasi-integrierbare Funktion von Ω nach $\overline{\mathbb{R}}$. Ferner sei $\tau: \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine Stoppzeit für $(S_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $P_\mu(\Omega_\tau) > 0$. Dann ist $\theta_\tau f$ meßbar, und es gilt

$$E_\mu[\theta_\tau f | \Omega_\tau \sigma_\tau] = E_{Y_\tau} f \ [P_\mu].$$

Beweis:

Es kann $\tau \equiv n \in \mathbb{N}$ angenommen werden. Die Behauptung folgt wie im vorigen Satz aus (2.5), (1.20) und (1.27).

Satz 2.11 läßt sich auch dann anwenden, wenn nicht eine Funktion $\theta_\tau f$, sondern eine Funktion f integriert werden soll. Zum Beweis benötigen wir das folgende Ergebnis (vgl. Witting (74), Hilfssatz 3.8, S. 132).

Lemma 2.12

Sei (Ω, A, P) ein σ-endlicher Maßraum, (Ω_1, A_1) ein Meßraum, (Ω_2, A_2) ein Standard-Borel-Raum (zur Definition vgl. Hinderer (72), S. 87), $X: \Omega \to \Omega_1$ meßbar, $Y: \Omega \to \Omega_2$ meßbar, $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ bzgl. X meßbar, $f: \Omega_2 \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar und $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Für alle $z \in Z(\Omega)$ sei

$$E[f(Y,z)|X] = g(.,z) \ [P].$$

Ist dann $f(Y,Z)$ P-quasi-integrierbar, so gilt

$$E[f(Y,Z)|X] = g(.,Z(.)) \ [P].$$

Beweis:

Der Standard-Beweis nutzt aus, daß unter den angegebenen Bedingungen eine bedingte Verteilung von Y bzgl. X existiert. ◇

Korollar 2.13.

Es seien μ und τ wie in Satz 2.11, Ω' ein Standard-Borel-Raum, $f: \Omega \to \Omega'$ A-meßbar, $g: \Omega_\tau \to \mathbb{R}$ $\Omega_\tau \sigma_\tau$-meßbar und $h: \mathbb{X} \times \Omega' \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

Produkt-meßbar. Dann gilt für alle $t \geq 0$

$$E_\mu[h(X_t, g, \theta_\tau f) | \mathfrak{A}_\tau \sigma_\tau] = E_{Y_\tau} h(X_{t-S_\tau(.)}, g(.), f)$$

P_μ-fast überall auf $\{S_\tau \leq t\}$.

Beweis:

Die Behauptung folgt aus Satz 2.11 und Lemma 2.12.

Korollar 2.14 (Schäl (70), Theorem 5.2)

$(Y_{n(t)})$ ist ein Semi-Markoffprozeß, und (Y_n) ist ein Markoffprozeß mit $(n \in \mathbb{N}, j \in I, t \geq 0)$

$$P_\mu\{Y_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | \sigma_n\} = P_{Y_n}\{Y_1 = j, S_1 \leq t\} \; [P_\mu].$$

Beweis:

Satz 2.11 mit (1.21) und (1.22). ◇

Bezeichnungen

Wir schreiben $Q_{ij}(t) := P_i\{Y_1 = j, S_1 \leq t\}$, $p_{ij} := Q_{ij}(\infty) = P_i\{Y_1 = j\}$. Der Markoffprozeß (Y_n) heißt die eingebettete Markoffkette (EMK). Begriffe wie "rekurrent", "transient", usw. beziehen sich auf die EMK. In Anlehnung an die Notation bei Chung (60) definieren wir die folgenden Größen. Dabei ist $i,j \in I$, $K \subset I$.

$$_K p_{ij}^{(0)} := \delta_{ij}, \; _K p_{ij}^{(1)} := p_{ij}, \; _K p_{ij}^{(n+1)} := \sum_{h \notin K} {}_K p_{ih}^{(n)} p_{hj} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$_K p_{ij}^{*} := \sum_{n=1}^{\infty} {}_K p_{ij}^{(n)}$$

$$f^*(i,K) := \sum_{j \in K} {}_K p_{ij}^{*}, \; f_{ij}^{*} := f^*(i,\{j\})$$

$$e_{ij} := {}_i p_{ij}^{*} = E_i \, \nu_j(\tau_{i1})$$

$$\pi_{ij} := \lim n^{-1} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)}$$

$$m_{iK} := E_i \, \tau_{K1}, \; m_{ij} := m_{i\{j\}}$$

$$\eta_i := E_i S_1 = \int_0^\infty dt(1-H_i(t))$$

$$\mu_{iK} := E_i T_{K1} \quad , \quad \mu_{ij} := \mu_{i\{j\}}$$

$$M_{ij}(t) := \begin{cases} E_i N_j(t) + \delta_{ij} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

Anschaulich ist ${}_K p_{ij}^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit, beim n-ten Schritt in j zu sein, bei Start in i, und ohne bei den Schritten dazwischen K besucht zu haben. Entsprechend ist ${}_K p_{ij}^{*}$ die erwartete Anzahl von Besuchen in j vor einem Besuch in K, bei Start in i. Insbesondere ist $f^*(i,K)$ die Wahrscheinlichkeit, von i in die Menge K zu gelangen, und e_{ij} die erwartete Anzahl von Besuchen in j zwischen zwei Besuchen in i. Ist $f_{ij}^* > 0$, so schreiben wir $i \rightsquigarrow j$. Weiter ist m_{iK} die erwartete Anzahl von Schritten, die benötigt werden, um von i in die Menge K zu gelangen. Der Erwartungswert für die dabei verstrichene Zeit ist μ_{iK}. Die erwartete Verweilzeit in i, d.h. die Zeit bis zum nächsten Erneuerungspunkt, wird mit η_i bezeichnet. Schließlich ist $M_{ij}(t)$ die erwartete Anzahl von Besuchen in j bis zur Zeit t bei Start in i, wobei diesmal Y_0 mitgezählt wird. Wir nennen $M_{ij}(t)$ die (zu $Q_{ij}(t)$ gehörige) Markoffsche Erneuerungsfunktion.

Lemma 2.15.

Es gilt $M_{ij}(t) < \infty$ und $\sup\{M_{ij}(t+1)-M_{ij}(t) \mid t \geq 0\} < \infty$ $(i,j \in I)$.

Beweis:

Das folgt aus der Erneuerungstheorie, siehe z. B. Prabhu (65), Theorem 5.2.1 und Theorem 5.3.2. ◇

Lemma 2.16.

Sei $t \geq 0$, $i,j \in I$ und $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine meßbare Abbildung. Dann gilt

$$M_{ij}(t) = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} P_i\{T_{jn} \leq t\}$$

$$= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} P_i^{(T_{jn})}((0,t])$$

und

$$\int_0^\infty M_{ij}(du)f(u) = \delta_{ij}f(0) + \sum_{n=1}^\infty E_i f(T_{jn})$$

$$= \delta_{ij}f(0) + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty P_i^{(T_{jn})}(du)f(u) \ .$$

Der Beweis von Lemma 2.16 folgt direkt aus den Definitionen. Wir verwenden dieses Lemma anstelle der sog. Markoffschen Erneuerungsgleichungen (vgl. Cinlar (69,75)). Das hat den Vorteil, daß wir an den Integranden f keine Beschränktheitsvoraussetzungen zu stellen brauchen. ◇

Der Zustandsraum I läßt sich disjunkt zerlegen in eine Menge von transienten Zuständen und in (abgeschlossene) Klassen von rekurrenten Zuständen. Mit α aus einer abzählbaren Indexmenge indizieren wir die rekurrenten Klassen D_α. Ihre Vereinigung sei D. Wir schreiben D_i für die Klasse von i ($i \in I$). Die Menge der positiv rekurrenten Zustände bezeichnen wir mit D_+, also $D_+ := \{i | m_{ii} < \infty\}$. Analog sei $\tilde{D}_+ := \{i | \mu_{ii} < \infty\}$. Die Anzahl der Klassen in D bezeichnen wir mit ν.

Rekurrenzeigenschaften

Lemma 2.17.

Sei $i \in I$, $\phi \neq K \subset J \subset I$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(2.18)\quad \mu_{iK} = \mu_{iJ} + \sum_{j \in J \setminus K} {}_K p_{ij}^* \, \mu_{jJ}$$

$$(2.19)\quad \mu_{iK} = \eta_i + \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^* \, \eta_j$$

$$= \eta_i + \sum_{m=1}^\infty \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(m)} \eta_j$$

$$= \eta_i + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(m)} \eta_j + \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(n)} \, \mu_{jK}$$

$$(2.20)\quad \mu_{ii} = \sum_j e_{ij} \, \eta_j \ , \quad \text{falls } i \in D \ .$$

Beweis:

Wegen $K \subset J$ ist

$$\begin{aligned}
\mu_{iK} &= E_i\, T_{K1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} E_i[\tau_{Jm} < \tau_{K1},\ T_{J,m+1} - T_{Jm}] \\
&= E_i\, T_{J1} + \sum_{m=1}^{\infty} E_i[\tau_{Jm} < \tau_{K1}, \theta_{\tau_{Jm}} T_{J1}] \qquad (1.29) \\
&= \mu_{iJ} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j \in J \setminus K} E_i[\tau_{Jm} < \tau_{K1}, Y_{\tau_{Jm}} = j] E_j T_{J1} \qquad \text{(Satz 2.11)} \\
&= \mu_{iJ} + \sum_{j \in J \setminus K} {}^{K}p^{*}_{ij}\, \mu_{jJ}\ .
\end{aligned}$$

Hieraus folgt auch der erste und zweite Ausdruck in (2.19), indem man $J = I$ setzt. Zum Beweis des dritten Ausdrucks:

$$\begin{aligned}
&\eta_i + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j \notin K} {}^{K}p^{(m)}_{ij}\, \eta_j + \sum_{j \notin K} {}^{K}p^{(n)}_{ij}\, \mu_{jK} \\
&= \eta_i + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j \notin K} {}^{K}p^{(m)}_{ij}\, \eta_j + \sum_{j \notin K} {}^{K}p^{(n)}_{ij} \Big(\eta_j + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{h \notin K} {}^{K}p^{(r)}_{jh}\, \eta_h\Big) \\
&= \eta_i + \sum_{m=1}^{n} \sum_{j \notin K} {}^{K}p^{(m)}_{ij}\, \eta_j + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{h \notin K} {}^{K}p^{(n+r)}_{ih}\, \eta_h \qquad \text{(A.5)} \\
&= \eta_i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j \notin K} {}^{K}p^{(m)}_{ij}\, \eta_j \\
&= \mu_{iK}
\end{aligned}$$

nach der zweiten Formel in (2.19). Schließlich ist (2.20) ein Spezialfall von (2.19), denn $e_{ii} = f^{*}_{ii} = 1 \quad (i \in D)$. ◇

Korollar 2.21.

$\mu_{ii} < \infty$ ist eine Klasseneigenschaft, d.h. für alle $i \in I$ gilt

$$\mu_{ii} < \infty \Rightarrow \forall j \in D_i \quad \mu_{jj} < \infty.$$

Ferner ist für $j \in D_i$ auch $\mu_{ij} < \infty \quad (i \in \tilde{D}_+)$.

Beweis:

Nach (2.18) ist $\mu_{i,\{i,j\}} + e_{ij}\mu_{j\{i,j\}} = \mu_{ii} < \infty$ für $i \neq j \in D_i$, $i \in \tilde{D}_+$, also $\mu_{i\{i,j\}} < \infty$ und $\mu_{j\{i,j\}} < \infty$ ($e_{ij} > 0$ nach (A.9)). Erneute Anwendung von (2.18) gibt daher $\mu_{jj} = \mu_{j\{i,j\}} + e_{ji}\mu_{i\{i,j\}} < \infty$, denn $e_{ji} < \infty$ wegen $i \rightsquigarrow j$ (siehe (A.9)).

Die zweite Aussage folgt aus $\mu_{ij} = \mu_{i\{i,j\}} + {}_jp^*_{ii}\mu_{i\{i,j\}}$ ((2.18)) und ${}_jp^*_{ii} < \infty$ ((A.9)). ◇

Bei vielen Sätzen benötigen wir als Voraussetzung, daß mit Wahrscheinlichkeit 1 keine "Explosionen" stattfinden: In jedem endlichen Zeitintervall sollen sich nur endlich viele Erneuerungspunkte befinden, d.h. $S_n \to \infty$. Für die Untersuchung der Durchschnittskosten ist es ferner entscheidend, daß die Menge $\tilde{D}_+$ von jedem Startpunkt aus mit Wahrscheinlichkeit 1 erreicht wird. Im Markoff-Fall entspricht das der Voraussetzung, daß die Markoffkette nicht-dissipativ ist, d.h. $f^*(i,D_+) = 1$ $(i \in I)$. Nach Chung (60), Theorem I.7.3 ist die letztere Eigenschaft äquivalent zu $\sum_j \pi_{ij} = 1$ $(i \in I)$. Das folgende Lemma gibt einige Beziehungen zwischen diesen Aussagen an.

Lemma 2.22

a) $f^*(i,\tilde{D}_+) = 1 \quad (i \in I) \Rightarrow D \subset \tilde{D}_+$

b) $f^*(i,D) = 1 \quad (i \in I) \Rightarrow P_i\{S_\infty = \infty\} = 1 \quad (i \in I) \Rightarrow \tilde{D}_+ \subset D$

c) $f^*(i,D_+) = 1 \quad (i \in I) \Rightarrow \tilde{D}_+ \subset D_+ = D$

Beweis:

a) Sei $i \in D$. Nach Voraussetzung existiert ein $j \in \tilde{D}_+$ mit $f^*_{ij} > 0$. Wegen $i \in D$ ist dann auch $f^*_{ji} > 0$, also $i \in D_j$. Das impliziert $i \in \tilde{D}_+$ (Korollar 2.21).

b) Der erste Teil folgt aus Corollary 10.3.17 in Cinlar (75). Sei $i \in \tilde{D}_+$. Es gilt: $\infty > \mu_{ii} \geq E_i[\tau_{i1} = \infty, T_{i1}] = E_i[\tau_{i1} = \infty, S_\infty] = P_i\{\tau_{i1} = \infty\} \cdot \infty$. Daraus folgt $P_i\{\tau_{i1} = \infty\} = 0$, also $i \in D$.

c) Daß keine nullrekurrenten Zustände existieren, folgt unmittelbar aus der Voraussetzung. Also gilt $D_+ = D$. Mit b) ergibt sich $\tilde{D}_+ \subset D$. ◇

Zur Vereinfachung formulieren wir eine Generalannahme, die alle in Lemma 2.22 auftretenden Aussagen impliziert. Insbesondere folgt aus ihr $\tilde{D}_+ = D_+ = D$. Die letzte Aussage in der Generalannahme wird häufig gebraucht und scheint für Anwendungen nicht besonders einschränkend zu sein.

Generalannahme

Die EMK ist nicht-dissipativ, und es gilt $D_+ \subset \tilde{D}_+$. Für alle $i \in I$ ist $\eta_i < \infty$.

Lemma 2.23.

Innerhalb einer Klasse ist $\mu_{ii} = e_{ij}\mu_{jj}$. Für $i \in I$ gilt

$$(2.24) \quad \sum_j f^*_{ij}\eta_j/\mu_{jj} = 1.$$

Beweis:

Ist $\mu_{ii} = \infty$, so ist für $j \in D_i$ $e_{ij} > 0$ (A.9) und $\mu_{jj} = \infty$ (Korollar 2.21). Sei also $\mu_{ii} < \infty$ und damit $i \in D$. Aus (2.20) und (A.10) folgt

$$\mu_{ii} = \sum_k e_{ik}\eta_k = e_{ij} \sum_k e_{jk}\eta_k = e_{ij}\mu_{jj}.$$

Innerhalb jeder rekurrenten Klasse ist die Summe der η_i/μ_{ii} gleich 1, wegen $\eta_i/\mu_{ii} = \eta_i/(e_{ij}\mu_{jj}) = e_{ji}\eta_i/\mu_{jj}$ ((A.10)) und (2.20). Mit $f^*(i,D) = 1$ folgt daraus (2.24). ◆

Korollar 2.25.

Es gilt $\nu = \sum_i 1/m_{ii} = \sum_i \eta_i/\mu_{ii}$.

Beweis:

Für $i \notin D$ ist $1/m_{ii} = 0$ ($\eta_i/\mu_{ii} = 0$). Innerhalb einer Klasse von D ist die Summe der $1/m_{ii}$ (η_i/μ_{ii}) gleich 1 nach (A.5) ((2.24)). ◇

§3 Stationäre Maße

Ein σ-endliches Maß P_μ auf (Ω,A), wie in Satz 2.2 eingeführt, heißt stationär für den semiregenerativen Prozeß, wenn gilt

$$P_\mu\{X_{t+t_k} \in B_k \ (1 \le k \le m)\} = P_\mu\{X_{t_k} \in B_k \ (1 \le k \le m)\}$$

für alle $t \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$, $t_k \ge 0$, $B_k \in \mathfrak{B}$ $(1 \le k \le m)$. Nach (1.24) ist das äquivalent zu

$$(3.1) \quad P_\mu(\theta^t A) = P_\mu(A) \qquad (t \ge 0, A \in A).$$

Stationäre Maße für Markoffsche Erneuerungsprozesse wurden zuerst für den Fall eines endlichen Zustandsraumes von Pyke (61b) untersucht. Für eine Klasse von Markoffschen Erneuerungsprozessen mit abzählbarem Zustandsraum beweisen Pyke und Schaufele (66) die Existenz und Eindeutigkeit stationärer Maße. Sie untersuchen das Problem ebenfalls für eine Klasse von semiregenerativen Prozessen, dort Markoffsche Erneuerungsprozesse mit Hilfspfaden genannt. Das allgemeinste Ergebnis bzgl. der Existenz von stationären Maßen für Markoffsche Erneuerungsprozesse gibt McDonald (77), wo der Zustandsraum überabzählbar sein darf.

Verteilung von X_t unter P_μ

Satz 2.2 zeigt, daß der Verlauf von X_t für $t \ge S_n$ durch P_{Y_n} bestimmt wird. Da man zu jedem t ein $n \in \mathbb{N}_0$ finden kann mit $S_n \le t < S_{n+1}$, sollte es möglich sein, das stochastische Verhalten von X_t aus dem von (S_n,Y_n) und aus den Verteilungen von X_t $(t < S_1)$ unter den P_i zu berechnen. Die folgenden Lemmata dienen zum Beweis der exakten Fassung dieser Vermutung (Satz 3.6).

Lemma 3.2.

$$P_i\{Y_{n(t)} = j, U_t \le x, Z_t \in C\} = \int_{t-x}^{t} M_{ij}(du) P_j\{t-u < S_1, Z_{t-u} \in C\}$$

für alle $i,j \in I$, $x,t \ge 0$, $C \in \mathfrak{C}$.

Beweis:

$$P_i\{Y_{n(t)} = j,\ U_t \le x,\ Z_t \in C\}$$

$$= P_i\{t<S_1, Y_o=j, U_t\le x, Z_t\in C\} + \sum_{n=1}^{\infty} P_i\{S_n\le t<S_{n+1}, Y_n=j, t-S_n\le x, Z_t\in C\}$$

$$= \delta_{ij}[t \le x] P_i\{t < S_1,\ Z_t \in C\}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} E_i[t-x\le T_{jm}\le t, P_i\{t-T_{jm}<S_{\tau_{jm}+1}-T_{jm}, Z_t\in C\,|\,\sigma_{\tau_{jm}}\}]$$

$$= \delta_{ij}[t\le x] P_i\{t<S_1, Z_t\in C\} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t-x}^{t} P_i^{(T_{jm})}(du) P_j\{t-u<S_1, Z_{t-u}\in C\}$$

$$= \int_{t-x}^{t} M_{ij}(du) P_j\{t-u<S_1,\ Z_{t-u}\in C\}$$

wegen $P_i\{S_\infty=\infty\} = 1$ (Generalannahme, Lemma 2.22) beim ersten Gleichheitszeichen, (1.29) und Korollar 2.13 beim dritten und Lemma 2.16 beim letzten. ◇

Lemma 3.3.

Sei $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ meßbar, $u \ge 0$ und $i,j \in I$. Dann ist auf $\{u < S_1\}$

$$\theta^u \int_0^{\infty} M_{Y_1 j}(ds) g(S_1+s) = E_i[\theta^u \int_0^{\infty} N_j(ds) g(s)\,|\,\sigma_1] \qquad [P_i]$$

Beweis:

Auf $\{u < S_1\}$ gilt P_i-fast überall

$$\theta^u \int_0^{\infty} M_{Y_1 j}(ds) g(S_1 + s) = \int_0^{\infty} M_{Y_1 j}(ds) g(S_1-u+s) \qquad (1.25, 1.26)$$

$$= E_{Y_1} \int_{0+}^{\infty} N_j(ds) g(S_1(.)-u+s) + [Y_1=j]\cdot g(S_1-u)$$

$$= E_i[\theta_1 \int_{0+}^{\infty} N_j(ds) g(S_1(.)-u+s) + [Y_1=j]\cdot g(S_1-u)\,|\,\sigma_1] \quad \text{(Satz 2.11)}$$

$$= E_i[\int_0^{\infty} N_j\ (S_1+ds) g(S_1-u+s)\,|\,\sigma_1] \qquad (1.30)$$

$$= E_i[\int_{S_1-u}^{\infty} N_j(u+ds) g(s)\,|\,\sigma_1]$$

$$= E_i[\theta^u \int_{S_1}^{\infty} N_j(ds)g(s)|\sigma_1] \qquad (1.25,\ 1.31)$$

$$= E_i[\theta^u \int_{0}^{\infty} N_j(ds)g(s)|\sigma_1] \ . \diamond$$

Lemma 3.4.

Für alle Startmaße μ, $j \in I$, $x,t \geq 0$ und $C \in \mathcal{E}$ ist

$$P_\mu\{Y_{n(t)} = j, U_t \leq x,\ Z_t \in C,\ S_1 \leq t\}$$

$$= E_\mu \int_{(t-x)^+}^{t} N_j(du) P_j\{t-u < S_1, Z_{t-u} \in C\}.$$

Beweis:

Für $\mu = i \in I$ folgt die Behauptung aus Lemma 3.2, Bemerkung 1.8, (SR1), der Definition von M_{ij}, Lemma 2.15 und aus den Beziehungen

$$(3.5) \quad S_1 \leq t \Leftrightarrow U_t < t \qquad (t \geq 0)\ ,$$

$$U_{t-u} < t \Leftrightarrow S_1 \leq t-u \text{ oder } u > U_0 \qquad (u,t \geq 0).$$

Für beliebiges μ ist

$$P_\mu\{Y_{n(t)} = j,\ U_t \leq x,\ Z_t \in C,\ S_1 \leq t\}$$

$$= E_\mu[S_1 \leq t, P_{Y_1}\{Y_{n(t-S_1(.))} = j, U_{t-S_1(.)} \leq x,\ Z_{t-S_1(.)} \in C\}]$$

(Korollar 2.13)

$$= E_\mu[\int_{t-S_1-x}^{t-S_1} M_{Y_1 j}(ds) P_j\{Z_{t-S_1(.)-s} \in C, t-S_1(.)-s < S_1\}]$$

(Lemma 3.2)

$$= \sum_i \int_0^\infty \mu(i,du)(1-H_i(u))^{-1} \cdot E_i[u<S_1, \theta^u \int_{t-S_1-x}^{t-S_1} M_{Y_1 j}(ds)$$

$$P_j\{Z_{t-S_1(.)-s} \in C, t-S_1(.)-s < S_1\}] \quad \text{(Satz 2.10)}$$

$$= \sum_i \int_0^\infty \mu(i,du)(1-H_i(u))^{-1} \cdot E_i[u<S_1,$$

$$E_i[\theta^u \int_{(t-x)^+}^{t} N_j(ds) P_j\{Z_{t-s} \in C, t-s < S_1\}|\sigma_1]] \quad \text{(Lemma 3.3)}$$

$$= E_\mu \int_{(t-x)^+}^{t} N_j(ds) P_j\{Z_{t-s} \in C, t-s < S_1\} \qquad \text{(Satz 2.10)}\ . \diamond$$

Satz 3.6.

Für alle Startmaße μ, $j \in I$, $x,t \geq 0$ und $C \in \mathcal{E}$ ist

$$P_\mu\{Y_{n(t)} = j,\ U_t \leq x,\ Z_t \in C\}$$

$$= \int_0^{(x-t)^+} \mu(j,du) P_j\{t+u < S_1,\ Z_{t+u} \in C\}/(1-H_j(u))$$

$$+ E_\mu \int_{(t-x)^+}^{t} N_j(du) P_j\{t-u < S_1,\ Z_{t-u} \in C\} .$$

Beweis:

Die Behauptung folgt aus Lemma 3.4 und (2.6), (1.24)-(1.26). ◇

Existenz stationärer Maße

Für jedes $h \in D$ läßt sich ein Startmaß π_h definieren durch

$$\pi_h(i,t) := e_{hi} \int_0^t du(1 - H_i(u)) \qquad (i \in I,\ t \geq 0).$$

Wegen $e_{hi} < \infty$ ((A.9)) erfüllt π_h die Bedingung in Satz 2.2. Es gilt also nach Satz 2.10

$$(3.7)\quad E_{\pi_h} g = \sum_i e_{hi} \int_0^\infty dt\, E_i[t < S_1,\ \theta^t g]$$

für P_{π_h}-quasi-integrierbare Funktionen $g: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Um spätere Fallunterscheidungen zu vermeiden, sei für $h \in I \setminus D$ $\pi_h = 0$, also auch $P_{\pi_h} = 0$.

Für $h \in D$ ist $\pi_h(I \times \mathbb{R}_+) = \sum_i e_{hi}\eta_i = \mu_{hh} < \infty$ nach Formel (2.20).

Die entsprechende Normierung zum W-Maß werden wir ab §4 benutzen, vgl. Bemerkung 4.4.

Die π_h sind Kombinationen von stationären Maßen für die EMK $(i \to e_{hi})$ und von Ausdrücken, die dem stationären Maß eines Erneuerungsprozesses entsprechen. Wir zeigen, daß P_{π_h} stationär für den semiregenerativen Prozeß ist. Dazu zitieren wir das

folgende Ergebnis, das aussagt, daß P_{π_h} stationär für den $(U_t, Y_{n(t)})$-Prozeß ist. Für einen Beweis siehe Pyke/Schaufele (66) oder McDonald (77).

Satz 3.8.

Sei $h \in I$, $t \geq 0$. Unter P_{π_h} ist die Verteilung von $(Y_{n(t)}, U_t)$ gleich π_h. ◇

Nach Satz 3.6 sind die $E_{\pi_h} N_j(t)$ entscheidend für die Eigenschaften von P_{π_h}. Wir beweisen deshalb das folgende Resultat.

Satz 3.9.

$$E_{\pi_h} N_j(t) = e_{hj} t \qquad (h \in D,\ j \in I,\ t \geq 0)$$

$$E_{\pi_h} n(t) = m_{hh} t \qquad (h \in D,\ t \geq 0) .$$

Beweis:

Nach Lemma 1.5 und Satz 3.8 ist

$$\begin{aligned} E_{\pi_h} N_j(t) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{2^m} P_{\pi_h}\{Y_{n(k\cdot 2^{-m}\cdot t)} = j,\ U_{k\cdot 2^{-m}\cdot t} < 2^{-m}\cdot t\} \\ &= \lim_{m\to\infty} 2^m e_{hj} \int_0^{2^{-m}\cdot t} du(1-H_j(u)) \\ &= e_{hj} \cdot t . \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt aus $n(t) = \sum_j N_j(t)$ und $m_{hh} = \sum_j e_{hj}$ ((A.7)). ◇

Unter P_{π_h} ist also die erwartete Anzahl der Besuche in j in einem beliebigen Zeitintervall proportional zu der Länge dieses Intervalls. Der Anschauung nach ist das auch zu erwarten von einem stationären Maß.

Satz 3.10.

Für $h \in D$ ist P_{π_h} stationär. Insbesondere gilt für $t \geq 0$, $i,j \in I$, $x,y \geq 0$, $C \in \mathfrak{C}$:

$$
\begin{aligned}
&P_{\pi_h}\{Y_{n(t)} = i,\ Y_{n(t)+1} = j,\ U_t \leq x,\ Y_t \leq y,\ Z_t \in C\} \\
&= e_{hi} \int_0^x du\, P_i\{u < S_1 \leq u + y,\ Y_1 = j,\ Z_u \in C\}.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Beweis:

Wegen (3.1) genügt es, (3.11) zu beweisen.
Nach Bemerkung 1.8 kann angenommen werden, daß Z_t $Y_{n(t)+1}$ und V_t enthält. Der Satz folgt dann unmittelbar aus Satz 3.9 und Satz 3.6.◇

Eine andere Möglichkeit, die Sätze 3.8, 3.9 und 3.10 zu beweisen, besteht darin, zunächst Satz 3.9 - etwa mit Hilfe von Lemma 2.1 in Pyke/Schaufele (66) - zu zeigen; Satz 3.8 ist dann ein Korollar zu Satz 3.10. Als Ergänzung beweisen wir das folgende Korollar.

Korollar 3.12.

Unter P_{π_h} ist die Verteilung von $(Y_{n(t)}, V_t)$ gleich π_h $(h \in I,\ t \geq 0)$.

Beweis:

Die Behauptung folgt aus Satz 3.10 mit Hilfe des folgenden Lemmas.◇

Lemma 3.13.

Sei G eine maßdefinierende Funktion mit $G(t) = 0$ für $t < 0$ und $G(\infty) < \infty$. Dann ist für alle $x \geq 0$ und für alle meßbaren Funktionen $h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$
\int_0^\infty du\, (G(x+u) - G(u)) = \int_0^x du\, (G(\infty) - G(u)),
$$

$$
\int_0^\infty du \int_{u+}^\infty G(dv) h(v-u) = \int_0^\infty du\, h(u)(G(\infty) - G(u)).
$$

Beweis:

Die erste Aussage ist leicht zu beweisen, die zweite folgt aus ihr mit dem Beweisprinzip für Integrale.◇

Eindeutigkeit der stationären Maße

Zum Schluß dieses Paragraphen zeigen wir, daß die P_{π_h} in gewissem Sinne die einzigen stationären Maße sind. Dieses Ergebnis wird in der Arbeit nicht weiter verwendet.

Bemerkung 3.14.

Ist μ ein Startmaß, so ist unterstellt, daß $\mu(j,y) < \infty$ $(j \in I, y < \lambda_j)$. Man kann zeigen, daß diese Eigenschaft bei einem stationären Startmaß bereits aus der Bedingung folgt: μ ist σ-endlich. (vgl. Pyke und Schaufele (66), Lemma 3.1).◇

Satz 3.15 (Pyke und Schaufele (66), Theorem 3.3).

Ist P_μ ein stationäres Maß, so existieren $c_j \geq 0$ $(j \in I)$, sodaß für alle $i,j \in I$, $x,y,t \geq 0$, $C \in \mathcal{K}$ gilt

$$(3.16)\quad P_\mu\{Y_{n(t)} = i,\ Y_{n(t)+1} = j,\ U_t \leq x,\ V_t \leq y,\ Z_t \in C\}$$
$$= c_i \int_0^x du\ P_i\{u < S_1 \leq u + y,\ Y_1 = j,\ Z_u \in C\},$$

$$(3.17)\quad \mu(i,x) = c_i \int_0^x du(1-H_i(u)) ,$$

$$(3.18)\quad E_\mu N_j(t) = c_j \cdot t ,$$

$$(3.19)\quad c_j = \sum_i c_i\, p_{ij} .$$

Beweis:

Zunächst zeigen wir (3.18). Für $t \geq 0$, $j \in I$, $x < \lambda_j$ ist

$$\infty > \mu(j,x) = P_\mu\{Y_{n(t)} = j,\ U_t \leq x\} \qquad ((2.3,\ 3.1,\ 1.24))$$
$$\geq E_\mu \int_{(t-x)^+}^{t} N_j(du) P_j\{t-u < S_1\} \qquad (\text{Satz } 3.6)$$

$$\geq E_\mu(N_j(t) - N_j(t-x)) \cdot (1-H_j(x)).$$

Daraus folgt $E_\mu N_j(t) < \infty$ $(t \geq 0,\ j \in I)$. Daher kann aus (1.31) geschlossen werden

$$E_\mu N_j(t+u) = E_\mu N_j(t) + E_\mu N_j(u) \qquad (t,u \geq 0,\ j \in I).$$

Somit hat man die Existenz von reellen Zahlen $c_j \geq 0$ mit (3.18).

Nach Satz 3.6 gilt (3.16), zunächst für $x < t$. Beziehung (3.17) ergibt sich aus (3.16), denn wegen (3.1) ist $P_\mu\{Y_o = i,\ U_o \leq x\} = P_\mu\{Y_t = i,\ U_t \leq x\} = \sum_j \lim_{y\to\infty} P_\mu\{Y_{n(t)} = i,\ Y_{n(t)+1} = j,\ U_t \leq x,\ V_t \leq y,\ Z_t \in \mathfrak{z}\}$. Für $x \geq t$ folgt dann (3.16) aus Satz 3.6.

Zum Beweis von (3.19):

$$\begin{aligned}
P_\mu\{Y_{n(t)} &= i,\ Y_{n(t)+1} = j,\ S_1 \leq t\} \\
&= P_\mu\{Y_o = i,\ Y_1 = j,\ U_o < t\} && (3.1,\ 3.5)\\
&= c_i \int_0^t du\ P_i\{u < S_1,\ Y_1 = j\}\ (< \infty) && (3.16)\\
&= c_i \int_0^\infty du\ (Q_{ij}(t+u) - Q_{ij}(u)) && (\text{Lemma } 3.13)\\
&= c_i \int_0^\infty du\ P_i\{u < S_1 \leq t+u,\ Y_1 = j\} \\
&= P_\mu\{Y_o = i,\ Y_1 = j,\ S_1 \leq t\} && (3.16)
\end{aligned}$$

Das wird in der folgenden Rechnung verwendet:

$$\begin{aligned}
E_\mu N_j(t) &= \sum_i \sum_{k=0}^\infty P_\mu(\{n(t)\geq k, Y_k=i, Y_{k+1}=j\} \setminus \{n(t)=k, Y_k=i, Y_{k+1}=j\}) \\
&= \sum_i \Big[\sum_{k=1}^\infty (P_\mu\{S_k\leq t, Y_k=i, Y_{k+1}=j\} - P_\mu\{n(t)=k, Y_k=i, Y_{k+1}=j\}) \\
&\qquad + P_\mu\{Y_o=i,\ Y_1=j,\ S_1\leq t\}\Big] \\
&= \sum_i \Big[\sum_{k=1}^\infty P_\mu\{S_k < t,\ Y_k = i\} \cdot p_{ij} \\
&\qquad - P_\mu\{Y_{n(t)}=i, Y_{n(t)+1}=j, S_1\leq t\} + P_\mu\{Y_o=i, Y_1=j, S_1\leq t\}\Big]
\end{aligned}$$

$$= \sum_i E_\mu N_i(t) \cdot p_{ij} .$$

Daraus folgt (3.19).◇

Korollar 3.20.

Sei μ ein stationäres Startmaß, (D_α) eine Indizierung der rekurrenten Klassen und $h_\alpha \in D_\alpha$. Wenn es ein $x > 0$ gibt mit $\sum_{i \notin D} \mu(i,x) < \infty$, dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $d_\alpha \geq 0$ mit

$$\mu = \sum_\alpha d_\alpha \pi_{h_\alpha} .$$

Beweis:

Aus (3.19) folgt für $i \in D_\alpha$ $c_i = d_\alpha e_{h_\alpha i}$ mit einem festen $d_\alpha \geq 0$ (siehe Lemma A.11). Wegen (3.11) und (3.16) bleibt also zu zeigen: Für $i \notin D$ ist $c_i = 0$. Nach Voraussetzung ist $\sum_{i \notin D} c_i < \infty$, und es gilt nach (3.19) $c_j = \sum_{i \notin D} c_i p_{ij} = \sum_{i \notin D} c_i p_{ij}^{(n)}$ $(j \notin D, n \in \mathbb{N})$, denn $p_{ij} = 0$ für $i \in D$, $j \notin D$. Mit $p_{ij}^{(n)} \to 0$ (siehe (A.8)) und Korollar A.2 folgt daraus $c_j = 0$ $(j \notin D)$.◇

Bemerkung 3.21.

Markoffsche Erneuerungsprozesse sind ein Spezialfall von sogenannten zufälligen markierten Punktfolgen, siehe z.B. König und Matthes (63) und Matthes (63). Zufällige markierte Punktfolgen verallgemeinern "Punktprozesse" in ähnlicher Weise, wie Markoffsche Erneuerungsprozesse eine Verallgemeinerung von Erneuerungsprozessen darstellen - zu Punktprozessen vgl. den Überblicksartikel von Daley und Vere-Jones (72). Semiregenerative Prozesse lassen sich in diesem Rahmen als Prozesse mit einem eingebetteten Punktprozeß erfassen (Franken (80)). In all diesen Fällen wird angenommen, daß die S_n auch für $n < 0$ definiert sind und daß mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt: $\lim_{n \to \pm\infty} S_n = \pm\infty$. Die Indizierung der S_n wird durch eine Konvention über die Lage von S_0 festgelegt.

In diesem allgemeineren Zusammenhang werden Beziehungen zwischen stationären W-Maßen, charakterisiert durch (3.1), und sogenannten

Palmschen Maßen hergestellt. Ein Palmsches Maß ${}^{o}P$ auf (Ω,A) ist ein W-Maß mit der Eigenschaft

$$(3.22)\quad {}^{o}P\{S_o = 0\} = 1 \quad \text{und} \quad {}^{o}P(\theta_1 A) = {}^{o}P(A) \qquad (A \in A).$$

Die Menge der Palmschen Maße ${}^{o}P$ wird auf die Menge der stationären W-Maße P_π bijektiv abgebildet mittels

$$(3.23)\quad P_\pi(A) = \rho \int_0^\infty dt\ {}^{o}P(\{t < S_1\} \cap \theta^t A) \qquad (A \in A).$$

Umgekehrt gilt

$$(3.24)\quad \rho t\ {}^{o}P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P_\pi(\{n < n(t)\} \cap \theta_n A) \qquad (t \in \mathbb{R}_+, A \in A).$$

Dabei ist $\rho = E_\pi n(1) = \lim_{t\to 0} P_\pi\{n(t) > 0\}/t = ({}^{o}ES_1)^{-1}$ die "Intensität" von P_π.

In unserem Fall ist leicht zu sehen, daß W-Maße der Gestalt

$$(3.25)\quad {}^{o}P = \sum_j c_j P_j / \sum_j c_j ,$$

wobei die c_j die Gleichungen (3.19) erfüllen, Palmsche Maße sind. Satz 3.15 enthält dann das Ergebnis, daß zu jedem stationären W-Maß ein Palmsches Maß (3.25) existiert, sodaß (3.23) gilt. Spezielle Palmsche Maße sind gegeben durch ${}^{o}_{i}P := \sum_j (f^*_{ij}/\mu_{jj}) P_j/\rho_i$, mit der Intensität $\rho_i := \sum_j f^*_{ij}/\mu_{jj}$. Die im Sinne von (3.23) zugehörigen stationären Maße sind dann gerade die in §4 definierten $P_{\pi,i}$. Auf diese Weise folgt aus der allgemeinen Theorie unser Satz 3.10. Satz 3.9 läßt sich mit Hilfe von (3.24) beweisen.

Daß die Existenz von stationären W-Maßen so leicht gezeigt werden kann, hat seinen Grund darin, daß die P_i als gegeben vorausgesetzt sind und daher mit Hilfe von Sätzen über Markoffketten die Palmschen Maße (3.25) direkt angegeben werden können. Die Beziehungen (3.23) und (3.24) zwischen den $P_{\pi,i}$ und den ${}^{o}_{i}P$ lassen sich auch für die Darstellung der Durchschnittskosten vorteilhaft verwenden, siehe Bemerkung 5.22.◇

Kapitel II SEMIREGENERATIVE PROZESSE MIT KOSTEN

§4 Die Kostenstruktur

In diesem Kapitel betrachten wir semiregenerative Prozesse, die mit einer Kostenstruktur versehen sind. Solche Prozesse wurden zum ersten Mal von Schellhaas (75, 79) untersucht.

Die Kostenstruktur wird in diesem Paragraphen eingeführt. Anschließend beweisen wir einen Satz über diskontierte Kosten. Die Durchschnittskosten werden in §5 untersucht. Wir zeigen, daß sie sich mit Hilfe eines stationären Maßes darstellen lassen, und geben den Zusammenhang zu den diskontierten Kosten an. In den Paragraphen 6 und 7 betrachten wir semiregenerative Prozesse, deren Verhalten mittels stationärer Strategien gesteuert werden kann. Die Untersuchung der stetigen Abhängigkeit der mittleren Rückkehrzeiten steht im Mittelpunkt von §6. Schließlich geben wir in §7 hinreichende Bedingungen dafür an, daß unter den stationären Strategien eine bzgl. des Durchschnittskostenkriteriums optimale existiert.

Definition der Kosten.

Die bis zur Zeit t akkumulierten Kosten sollen aus zwei Teilen zusammengesetzt sein. Der eine ist ein Funktional des semiregenerativen Prozesses (Z_t), der andere ein Funktional des zugehörigen Markoffschen Erneuerungsprozesses (S_n, Y_n) (vgl. Schellhaas (79)). Im einzelnen sei

$$K(t) := \int_0^t du\, c(Z_u) + \sum_{n=0}^{n(t)-1} d(Y_n, Y_{n+1}) \qquad (t \geq 0)$$

die Zufallsvariable, die die Kosten bis zur Zeit t beschreibt. Dabei ist

$c: \mathfrak{Z} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ meßbar und nach unten beschränkt,
$d: I \times I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nach unten beschränkt.

Wir interpretieren c als "Kostenrate", d als "Sprungkosten". Der Betrag $d(Y_n, Y_{n+1})$ fällt beim Übergang von Y_n nach Y_{n+1}, also zur

Zeit S_{n+1}, an.

Bemerkung 4.1.

An den meisten Sätzen und Beweisen würde sich nichts ändern, wenn $d(Y_n,Y_{n+1})$ zur Zeit S_n anfiele. Dann wäre $K(t) = \int_0^t du\, c(Z_u) + \sum_{n=0}^{n(t)} d(Y_n,Y_{n+1})$. In den Anwendungen (vgl. §13) ist manchmal sogar d zusammengesetzt aus einem Teil, der zur Zeit S_n, und einem anderen, der zur Zeit S_{n+1} anfällt. Wo Modifikationen notwendig sind, wird in Bemerkungen darauf hingewiesen. ◇

Wegen $P_i\{S_\infty = \infty\} = 1$ (Generalannahme und Lemma 2.22) ist $P_i\{\sum_{n=0}^{n(t)-1} d^-(Y_n,Y_{n+1}) < \infty\} = 1$ $(i \in I)$. Daher ist $K(t)$ P_i-fast überall definiert $(i \in I)$, was für unsere Zwecke ausreichend ist. Wir vereinbaren die Konvention

(4.2) $c(Z_t) = 0$ für $t < 0$ oder $t \geq S_\infty$.

Definiere jetzt für $\alpha > 0$, $i \in I$

$$v_\alpha := \int_0^\infty dt\, e^{-\alpha t}\, c(Z_t) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha S_{n+1}} d(Y_n,Y_{n+1})$$

$$V_{i,\alpha} := E_i\, v_\alpha$$

$$\underline{\Phi}_i := \varliminf_{t\to\infty} t^{-1}\, E_i K(t)$$

$$\overline{\Phi}_i := \varlimsup_{t\to\infty} t^{-1}\, E_i K(t)$$

$$\bar{d}(i) := E_i\, d(Y_0,Y_1) = \sum_j p_{ij} \cdot d(i,j)$$

$$\Phi_i := E_{\pi,i}[c(Z_0) + \bar{d}(Y_0)/\eta_{Y_0}]$$

Hierbei ist das Sub-W-Maß $P_{\pi,i}$ definiert durch

$$P'_{\pi,i}(A) := \sum_j f^*_{ij} \int_0^\infty dt\, P_j(\{t < S_1\}\theta^t A)/\mu_{jj}\ .$$

Nach (1.24) und (1.26) gilt also

$$(4.3)\quad \Phi_i = \sum_j (f^*_{ij}/\mu_{jj}) \cdot \rho(j) \ ,$$

$$\text{mit}\quad \rho(j) := E_j[\int_0^{S_1} dt\ c(Z_t) + d(Y_0,Y_1)].$$

Bei (4.3) beachte $0 \cdot \infty := 0$. Wir definieren noch

$$\rho_\alpha(j) := E_j[\int_0^{S_1} dt\ e^{-\alpha t} c(Z_t) + e^{-\alpha S_1} d(Y_0,Y_1)]$$

für $\alpha \geq 0$, sodaß gilt: $\rho(j) = \rho_0(j)$.

Wir interpretieren v_α als die (mit $\alpha > 0$) diskontierten (Gesamt-) Kosten, $V_{i,\alpha}$ als die erwarteten diskontierten Kosten bei Start in $i \in I$. Die durchschnittlichen erwarteten Kosten bei Start in $i \in I$ sind $\underline{\Phi}_i$ bzw. $\overline{\Phi}_i$. Wir betrachten in erster Linie $\overline{\Phi}_i$. Unter gewissen Bedingungen ist $\underline{\Phi}_i = \overline{\Phi}_i = \Phi_i$; das ist das Hauptergebnis von §5 (siehe Satz 5.1). Zur Einführung von Φ_i vgl. auch Bemerkung 5.10. Mit $\rho(i)$ ($\rho_\alpha(i)$) werden die (diskontierten) Einschritt-Kosten bezeichnet.

Bemerkung 4.4.

Für $i \in D$ ist $P_{\pi,i} = P_{\pi_i}/\mu_{ii}$ (Lemma 2.23). Nach demselben Lemma gilt

$$(4.5)\quad P_{\pi,i}(\Omega) = 1 \qquad (i \in I) \ .$$

Für alle $i \in I$ ist $P_{\pi,i}$ stationär nach Satz 3.10, denn wegen (3.7) und Lemma 2.23 ist $P_{\pi,i}$ eine Linearkombination von stationären Maßen. Genauer gilt

$$(4.6)\quad P_{\pi,i} = \sum_\alpha f^*(i,D_\alpha) P_{\pi,\alpha} \qquad (i \in I) \ ,$$

wobei α die rekurrenten Klassen D_α indiziert und für $j \in D_\alpha$ $P_{\pi,\alpha}$ gleich $P_{\pi,j}$ ist. Man hat daher die folgende Beziehung

$$(4.7)\quad \Phi_i = \sum_\alpha f^*(i,D_\alpha)\Phi_\alpha \qquad (i \in I),$$

mit $\Phi_\alpha = \Phi_j$ für $j \in D_\alpha$. Die Stationarität von $P_{\pi,i}$ ist entscheidend für Satz 5.18 und daher zentral für die gesamte Arbeit.◇

Wohldefiniertheit der Kosten

Damit die gerade eingeführten Größen v_α, $V_{i,\alpha}$, $E_iK(t)$ und Φ_i auch im Fall $d^- \neq 0$ wohldefiniert sind, müssen einige Annahmen gemacht werden. Wann sie gelten sollen, wird jeweils angeführt.

$$(4.8)\quad E_i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} < \infty \qquad (\alpha > 0,\ i \in I)$$

$$(4.9)\quad E_i n(t) < \infty \qquad (t \geq 0,\ i \in I)$$

$$(4.10)\quad \exists \delta > 0 \quad \forall i \in I \quad \eta_i \geq \delta \quad .$$

Gilt (4.8) oder $d \geq 0$, so ist v_α P_i-fast überall definiert und $V_{i,\alpha}$ existiert, weil c und d nach unten beschränkt sind. Wenn im Falle $d^- \neq 0$ (4.9) angenommen wird, existiert $E_iK(t)$ und daher auch $\underline{\Phi}_i$ und $\overline{\Phi}_i$. Schließlich ist Φ_i wohldefiniert, wenn $d \geq 0$ oder (4.10) gilt.

Bemerkung 4.11.

Die Bedingungen (4.8) - (4.10) drücken sämtlich aus, daß die Zeitpunkte S_n nicht zu dicht aufeinander folgen. Wegen

$$E_i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha t} P_i\{S_n \leq t\} = e^{-\alpha t} E_i n(t) \qquad (t \geq 0)$$

wird (4.9) von (4.8) impliziert. Es gilt i.a. jedoch weder (4.9) $\Rightarrow$ (4.10) noch (4.10) $\Rightarrow$ (4.9). Das zeigt das folgende Beispiel und Bemerkung 4.13. $\Diamond$

Beispiel 4.12.

Sei $I = \mathbb{N}_o$, $Q_{ij}(t) = p_{ij}\, H_i(t)$, $p_{oo} = 1$, $H_o(t) = [1 \leq t]$, $p_{i,i+1} = p_i$, $p_{io} = 1 - p_i$ $(i \in \mathbb{N})$,

$$H_i(t) = \begin{cases} 0 & t < \varepsilon_i \\ p_i & \varepsilon_i \leq t < x_i \\ 1 & x_i \leq t \end{cases} \qquad (i \in \mathbb{N},\ t \geq 0)\ ,$$

$p_i = (i/(i+1))^{1/2}$, $\varepsilon_i > 0$, $\sum \varepsilon_i =: \varepsilon < \infty$, $x_i = 1 + \sqrt{i}\ (1 - \varepsilon_i)$.

Dann ist $\eta_i = 1$ $(i \in I)$, und die EMK ist wegen

$$P_i\{Y_n \neq Q \ (n \in \mathbb{N})\} = \prod_{j=0}^{\infty} p_{i+j} = 0 \qquad (i \in \mathbb{N})$$

nicht-dissipativ. Es gilt aber für $i = 1$, $t \geq \varepsilon$

$$P_i\{S_n \leq t\} \geq P_i\{S_1=\varepsilon_1, S_2-S_1=\varepsilon_2, \ldots, S_n-S_{n-1}=\varepsilon_n, \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \leq t\}$$

$$= (n(n+1))^{-1/2}$$

$$\geq 1/(n+1)$$

und daher $E_i n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_i\{S_n \leq t\} = \infty$. ◇

Bemerkung 4.13.

Für $i \in D$ ist $E_i n(t) < \infty$ $(t \geq 0)$. Denn mit Formel (6.5) in Cinlar (69) (vgl. auch Schellhaas (77), Beweis von Theorem 4.4), (A.7) und Lemma 2.15 gilt

$$1 + E_i n(t) = \sum_j M_{ij}(t) \leq \sum_j e_{ij} M_{ii}(t) = m_{ii} M_{ii}(t) < \infty.$$

Es läßt sich daher leicht ein Beispiel angeben mit $E_i n(t) < \infty$ für alle $i \in I$, $t \geq 0$ und $\inf \eta_i = 0$. ◇

Eine hinreichende Voraussetzung für (4.8) - (4.10) ist

$$\exists \alpha > 0 \qquad \sup_{i \in I} E_i e^{-\alpha S_1} < 1 \ .$$

Das wird im allgemeineren Zusammenhang in §8 bewiesen (siehe Satz 8.9). Die Bedingung wird auch in Schellhaas (75), Lemma 2.1 verwendet. ◇

Darstellung der diskontierten Kosten

In Schellhaas (79), Theorem (4.1) werden unter gewissen Bedingungen, die Beschränktheitsfunktionen verwenden, die folgenden Darstellungen von $V_{i,\alpha}$ bewiesen.

(4.14) $V_{i,\alpha} = \sum_j M_{ij}^{(\alpha)}(\infty) \rho_\alpha(j)$.

Die $V_{i,\alpha}$ sind eindeutige Lösung (v_i) des folgenden linearen Gleichungssystems:

(4.15) $v_i = \sum_j Q_{ij}^{(\alpha)}(\infty) v_j + \rho_\alpha(i)$.

Dabei ist

$$Q_{ij}^{(\alpha)}(t) = \int_0^t Q_{ij}(du) e^{-\alpha u}$$

und $M_{ij}^{(\alpha)}$ die zu $Q_{ij}^{(\alpha)}$ gehörige Markoffsche Erneuerungsfunktion.

Für die Eindeutigkeitsaussage sind die Beschränktheitsvoraussetzungen wesentlich. Die Darstellungen selbst gelten jedoch auch in unserem allgemeineren Fall, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.16.

Sei $\alpha > 0$ und μ ein Startmaß (siehe Satz 2.2). Gelte $d^- = 0$ oder $E_\mu \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} < \infty$. Dann ist

(4.17) $E_\mu v_\alpha = E_\mu \left[\int_0^{S_1} dt\, e^{-\alpha t} c(Z_t) + e^{-\alpha S_1} d(Y_0, Y_1) + e^{-\alpha S_1} V_{Y_1,\alpha} \right]$,

(4.18) $= E_\mu \left[\int_0^{S_1} dt\, e^{-\alpha t} c(Z_t) + e^{-\alpha S_1} d(Y_0, Y_1) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} \rho_\alpha(Y_n) \right]$.

Insbesondere gelten für $\mu = i \in I$ die Beziehungen (4.14) und (4.15).

Beweis:

Nach (1.20) - (1.22) und Konvention (4.2) über $c(Z_t)$ ist

(4.19) $v_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha S_n} \theta_n \left[\int_0^{S_1} dt\, e^{-\alpha t} c(Z_t) + e^{-\alpha S_1} d(Y_0, Y_1) \right]$.

Daraus folgt (4.18) mit Hilfe von Satz 2.11. Analog ergibt sich (4.17) aus

$$v_\alpha = \int_0^{S_1} dt\, e^{-\alpha t} c(Z_t) + e^{-\alpha S_1} d(Y_0, Y_1) + e^{-\alpha S_1} \theta_1 \left[\int_0^{\infty} dt\, e^{-\alpha t} c(Z_t) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha S_{n+1}} d(Y_n, Y_{n+1}) \right]. \diamond$$

§5 Durchschnittskosten

Hauptergebnis dieses Paragraphen ist der Satz 5.1, der Theorem (4.4) in Schellhaas (79) verallgemeinert. Wie im vorigen Paragraphen bei den diskontierten Kosten ist nämlich die von Schellhaas angegebene Darstellung der Durchschnittskosten auch dann gültig, wenn keine Beschränktheitsvoraussetzungen gemacht werden. Schellhaas' Beweis benutzt eine Verallgemeinerung von Cinlars Theorie der Markoffschen Erneuerungsgleichungen (Cinlar (69), (75)). Dagegen werden hier die Eigenschaften des semiregenerativen Prozesses, wie in Kapitel I entwickelt, direkt ausgenutzt. Das Vorgehen ist im Prinzip das gleiche wie für Theorem 11.1 in Schäl (70).

Für $K \subset I$ sei $\tau_K := [Y_0 \in K] \cdot \tau_{K1}$ das erste $n \in \mathbb{N}_0$ (!), für das $Y_n \in K$. Setze $T_K := S_{\tau_K}$, $K_{abs}(t) := \int_0^t du|c(Z_u)| + \sum_{n=0}^{n(t)-1} |d(Y_n, Y_{n+1})|$ $(t \geq 0)$.

Satz 5.1

Sei $i \in I$ und K eine endliche Teilmenge von D mit $f^*(i,K) = 1$ und $\lim_{t\to\infty} t^{-1} E_i K_{abs}(t \wedge T_K) = 0$. Ferner gelte $d \geq 0$ oder (4.9), (4.10). Dann ist

$$\underline{\Phi}_i = \overline{\Phi}_i = \lim_{t\to\infty} t^{-1} E_i K(t) = \Phi_i .$$

Bemerkung 5.2

Wegen der Definition von T_K ist die Existenz einer Menge K wie in der Voraussetzung des Satzes für $i \in D$ automatisch gegeben: Setze nämlich $K = \{i\}$. Für $i \in I \setminus D$ ist eine hinreichende Voraussetzung, daß die absoluten Kosten, $E_i K_{abs}(T_K)$, bis zum Eintritt in $K \subset D$ bei Start in i endlich sind.◇

Zum Beweis des Satzes werden eine Reihe von Lemmata benötigt, die zunächst bewiesen werden sollen.

Die Kostenrate

Lemma 5.3

Sei $t \geq 0$, $i \in D$ und die Kostenrate $c \geq 0$. Dann ist

$$E_i c(Z_t) = \int_0^t M_{ii}(du) E_i[c(Z_{t-u}),\ t-u < T_{i1}] \ .$$

Beweis:

$$E_i c(Z_t) = E_i[c(Z_t), t < T_{i1}] + \sum_{n=1}^{\infty} E_i[c(Z_t), T_{in} \leq t < T_{i,n+1}]$$

$$= E_i[c(Z_t), t < T_{i1}]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} E_i[E_i[c(Z_{t-T_{in}(.)}), t-T_{in}(.) < T_{i1}], T_{in} \leq t]$$

$$= E_i[c(Z_t), t < T_{i1}]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} E_i \int_0^t P_i^{(T_{in})}(du) E_i[c(Z_{t-u}), t-u < T_{i1}]$$

$$= \int_0^t M_{ii}(du) E_i[c(Z_{t-u}), t-u < T_{i1}] \ .$$

Beim ersten Gleichheitszeichen beachte $P_i\{\lim T_{in} = \infty\} = 1$ (Generalannahme und Lemma 2.22). Das zweite benutzt (1.24), (1.29) und Korollar 2.13, das letzte Lemma 2.16.◇

Lemma 5.4

Sei $t \geq 0$, $i \in I$, $K \subset D$ und $c \geq 0$. Dann gilt

$$E_i \int_0^t du\ c(Z_u) = E_i \int_0^{t \wedge T_K} du\ c(Z_u)$$

$$+ \sum_{j \in K} E_i[Y_{\tau_K} = j, T_K \leq t, \int_0^{t-T_K} M_{jj}(ds) E_j \int_0^{(t-T_K(.)-s) \wedge T_{j1}} du\ c(Z_u)]$$

Beweis:

$$E_i[c(Z_u), T_K \leq u] = E_i[E_{Y_{\tau_K}} c(Z_{u-T_K(.)}), T_K \leq u] \qquad (1.29)\ (\text{Kor. } 2.13)$$

$$= \sum_{j \in K} E_i[Y_{\tau_K} = j,\ T_K \leq u,\ E_j c(Z_{u-T_K(.)})]$$

$$= \sum_{j\in K} E_i[Y_{\tau_K} = j,\ T_K \le u,$$

$$\int_0^{u-T_K} M_{jj}(ds) E_j[c(Z_{u-T_K(.)-s}), u - T_K(.) - s < T_{j1}]]$$

nach Lemma 5.3. Daher ist

$$E_i \int_0^t du\ c(Z_u) = E_i \int_0^{t\wedge T_K} du\ c(Z_u) + \int_0^t du\ E_i[c(Z_u), T_K \le u]$$

gleich dem behaupteten Ausdruck aufgrund des Satzes von Fubini.◇

Die Sprungkosten

Lemma 5.5

Sei $t \ge 0$, $i \in D$ und $d \ge 0$. Dann ist

$$E_i \sum_{n=0}^{n(t)-1} d(Y_n, Y_{n+1}) = \int_0^t M_{ii}(du) E_i \sum_{n=0}^{n((t-u)\wedge T_{i1})-1} d(Y_n, Y_{n+1})$$

Beweis:

$$E_i \sum_{n=0}^{n(t)-1} d(Y_n, Y_{n+1}) = E_i \sum_{n=0}^{n(t\wedge T_{i1})-1} d(Y_n, Y_{n+1})$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} E_i \sum_{n=n(T_{ik})}^{n(t\wedge T_{i,k+1})-1} d(Y_n, Y_{n+1})$$

$$= E_i \sum_{n=0}^{n(t\wedge T_{i1})-1} d(Y_n, Y_{n+1})$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} E_i[E_i \sum_{n=0}^{n((t-T_{ik}(.))\wedge T_{i1})-1} d(Y_n, Y_{n+1}),\ t \ge T_{ik}]$$

((1.22, 1.23, 1.29), Kor. 2.13)

$$= \int_0^t M_{ii}(du) E_i \sum_{n=0}^{n((t-u)\wedge T_{i1})-1} d(Y_n, Y_{n+1}) \qquad \text{(Lemma 2.16)}$$

◇

Lemma 5.6

Sei $t \ge 0$, $i \in I$, $K \subset D$ und $d \ge 0$. Dann ist

$$E_i \sum_{n=0}^{n(t)-1} d(Y_n, Y_{n+1}) = E_i \sum_{n=0}^{n(t\wedge T_K)-1} d(Y_n, Y_{n+1})$$

$$+ \sum_{j\in K} E_i[Y_{\tau_K} = j, T_K \le t, \int_0^{t-T_K} M_{jj}(ds) E_j \sum_{n=0}^{n((t-T_K(.)-s)\wedge T_{j1})-1} d(Y_n, Y_{n+1})]$$

Beweis:

Ähnlich wie bei Lemma 5.4 mit Lemma 5.5.◇

Kosten während eines Zyklus

Lemma 5.7 (vgl. Schäl (70), (7.7))

Sei $c \ge 0$ und $d \ge 0$. Dann ist

$$E_i K(T_{i1}) = \sum_j e_{ij} \cdot \rho(j) \qquad (i \in D).$$

Beweis:

Zum Beweis für den c-Teil definiere

$$_iM_{ij}(t) := \delta_{ij} + E_i[N_j(t) \wedge (\nu_j(\tau_{i1}) - 1)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{S_n \le t,\ Y_n = j,\ n < \tau_{i1}\}.$$

Ähnlich wie in Lemma 5.3 beweist man

$$E_i[c(Z_t), t < T_{i1}] = \sum_j \int_0^t {}_iM_{ij}(du) E_j[c(Z_{t-u}), t-u < S_1].$$

Durch Integration über t folgt daraus die Behauptung für den c-Teil mit dem Satz von Fubini und $_iM_{ij}(\infty) = e_{ij}$.

Für den d-Teil ist zu zeigen, daß $E_i \sum_{n=0}^{\tau_{i1}-1} d(Y_n, Y_{n+1})$

$= \sum_j e_{ij} E_j d(Y_o, Y_1)$. Das ergibt sich leicht mit den Methoden für Markoffketten; vgl. auch Chung (60), Theorem I.14.5.◇

Erneuerungssätze ,

Lemma 5.8 (Pyke und Schaufele (64), S. 1752)

Sei G eine maßdefinierende Funktion mit $G(t) = 0$ für $t < 0$ und $\sup_t(G(t+1) - G(t)) < \infty$, F eine maßdefinierende Funktion mit $F(t) = 0$ für $t < 0$. Dann ist $\lim_{t\to\infty} G * F(t)/G(t) = F(\infty)$. ◇

Lemma 5.9

$$\lim_{t\to\infty} M_{jj}(t)/t = 1/\mu_{jj} \qquad (j \in D)$$

Beweis:

Das folgt aus der Erneuerungstheorie, denn die $(T_{jn})_{n\in\mathbb{N}}$ bilden einen Erneuerungsprozeß unter P_j (Beweis mit (1.29) und Satz 2.11), vgl. auch Cinlar (75), Theorem 10.4.17.◇

Beweis von Satz 5.1

Sei zunächst $c \geq 0$ und $d \geq 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

a) $\forall j \in K$

$$P_i\{Y_{\tau_K} = j,\ T_K < \infty\} \cdot E_j[\int_0^{T_{j1}} du\ c(Z_u) + \sum_{n=0}^{\tau_{j1}-1} d(Y_n, Y_{n+1})] < \infty$$

Auf die rechts stehenden Ausdrücke in Lemma 5.4 und Lemma 5.6 ist der Konvergenzsatz A.1 und Lemma 5.8 anwendbar, wegen $\sup_s(M_{jj}(s+1) - M_{jj}(s)) < \infty$ (Lemma 2.15). Mit Lemma 5.9 folgt

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} E_i K(t) = \sum_{j\in K} P_i\{Y_{\tau_K} = j, T_K < \infty\} \cdot E_j K(T_{j1})/\mu_{jj}$$

$$= \sum_{j\in K} P_i\{Y_{\tau_K} = j\} \sum_{h\in D_j} \rho(h)/\mu_{hh} \qquad \text{(Lemma 5.7, Lemma 2.23).}$$

Wegen $f^*(i,K) = 1$ ist dies

$$= \sum_{h\in I} f^*_{ih}\ \rho(h)/\mu_{hh} = \Phi_i \qquad (4.3).$$

b) $\exists j \in K \quad P_i\{Y_{\tau_K} = j,\ T_K < \infty\} \cdot E_j K(T_{j1}) = \infty.$

Dann ist $f^*_{ij} > 0$ und $E_j K(T_{j1}) = \infty$, nach (4.3), Lemma 2.23 und und Lemma 5.7 also $\Phi_i = \infty$. Andererseits existiert zu jedem $M < \infty$ ein $t_o \in \mathbb{R}_+$ mit $E_j K(T_{j1} \wedge t) \geq M \cdot [t \geq t_o]$. Nach Lemma 5.4 und

Lemma 5.6 ist dann

$$t^{-1}E_i\ K(t) \geq M \cdot E_i[Y_{\tau_K} = j, T_K \leq t, M_{jj}(t-T_K-t_o)/t].$$

Die rechte Seite konvergiert mit $t \to \infty$ gegen $M \cdot P_i\{Y_{\tau_K}=j\}$ nach Satz A.1 und Lemma 5.9. Da M beliebig war, folgt daraus $\overline{\Phi}_i = \underline{\Phi}_i = \infty$.

Im allgemeinen Fall wende das Ergebnis auf den positiven und den negativen Teil von c bzw. d getrennt an. Durch Addition folgt daraus die Behauptung, denn die auftretenden Summen sind wohldefiniert: $E_i K^{(-)}(t) < \infty$ nach (4.9), wobei $K^{(-)}(t) := \int_0^t du\ c^-(Z_u) + \sum_{n=0}^{n(t)-1} d^-(Y_n, Y_{n+1})$. Und $\Phi_i^{(-)} < \infty$ nach (4.10) und (2.24), mit $\Phi_i^{(-)} := \sum_j (f^*_{ij}/\mu_{jj}) \cdot E_j[\int_0^{S_1} du\ c^-(Z_u) + d^-(Y_o, Y_1)]$. ◇

Bemerkung 5.10.

Satz 5.1 ist eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes für Markoffketten auf den Semi-Markoff-Fall: $n^{-1}\ E \sum_{k=1}^{n} f(Y_k) \to \int f\, d\pi$, wenn (Y_n) eine irreduzible Markoffkette mit stationärem W-Maß und f z.B. eine beschränkte Funktion ist (siehe Chung (60), Beweis von Theorem I.15.3, Formel (9)). Aufgrund von Satz 5.1 sind die Durchschnittskosten $\underline{\Phi}_i = \overline{\Phi}_i$ leichter berechenbar, da durch Φ_i gegeben. Dasselbe gilt für die etwaige Abhängigkeit der Durchschnittskosten von einer Strategie, siehe §7 und §10.

Selbst bei beschränkten Kosten sind zum Beweis der Aussage von Satz 5.1 vergleichsweise stärkere Voraussetzungen erforderlich als im Markoff-Fall. Es soll nicht nur $f^*(i,D) = 1$ gelten, sondern sogar eine endliche Menge $K \subset D$ existieren mit $f^*(i,K) = 1$. Von i aus sind also nur endlich viele Klassen in D zu erreichen. Diese stärkere Voraussetzung ist deshalb notwendig, weil aus $f^*(i,D) = 1$ noch nicht - wie im Markoff-Fall - folgt, daß $E_i n(t)/t = \sum_j E_i N_j(t)/t \to \sum_j f^*_{ij}/\mu_{jj}$. ◇

"Pseudo-Durchschnittskosten"

Häufig wird statt der Durchschnittskosten $\underline{\Phi}_i$ oder $\overline{\Phi}_i$ der Grenzwert

$$\psi_i := \lim_{n\to\infty} \frac{E_i K(S_n)}{E_i S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{E_i \sum_{m=0}^{n-1} \rho(Y_m)}{E_i \sum_{m=0}^{n-1} \eta_{Y_m}}$$

betrachtet. Das folgende Korollar zeigt, daß ψ_i gleich Φ_i ist, wenn es nur eine rekurrente Klasse gibt (vgl. Ross (70), Theorem 7.5). Im allgemeinen gilt die Gleichheit jedoch nicht im Falle mehrerer rekurrenter Klassen.

Korollar 5.11

Sei $i \in I$ und K eine endliche Teilmenge von D mit $f^*(i,K) = 1$ und $\lim t^{-1} E_i K_{abs}(t \wedge T_K) = 0$. Ferner sei ρ von unten beschränkt, und es gelte $\rho \geq 0$ oder (4.9), (4.10). Dann existiert der Grenzwert $\psi_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und die folgende Beziehung gilt:

$$(5.12)\quad \psi_i = \frac{\sum_\alpha f^*(i,D_\alpha)\kappa_\alpha \Phi_\alpha}{\sum_\alpha f^*(i,D_\alpha)\kappa_\alpha} \quad .$$

Dabei indiziert α die rekurrenten Klassen D_α, $\kappa_\alpha := \mu_{jj}/m_{jj}$ und $\Phi_\alpha = \Phi_j$ für $j \in D_\alpha$.

Beweis:

Nach Lemma 2.23 ist κ_α wohldefiniert. Der Nenner in (5.12) ist endlich, weil von i aus nach Voraussetzung nur endlich viele Klassen in D erreicht werden können. Nach Satz 5.1 (für $S_n = n$, c durch 0 und d durch ρ ersetzt) ist $\lim n^{-1} E_i \sum_{m=0}^{n-1} \rho(Y_m)$ $= \sum_j f^*_{ij} \rho(j)/m_{jj} = \sum_\alpha f^*(i,D_\alpha)\kappa_\alpha \Phi_\alpha$ ((4.3)). Der Nenner ergibt sich analog.◇

Bemerkung 5.13.

Im Falle mehrerer rekurrenter Klassen bereitet die Untersuchung des Kriteriums ψ_i Schwierigkeiten. Der tiefere Grund dafür mag darin liegen, daß in jenem Fall ψ_i nicht den Durchschnittskosten entspricht, siehe (5.12). Insbesondere gilt i.a. nicht

$\psi_j = \sum_i f^*(i,D_\alpha)\psi_\alpha$. In gewisser Weise ist also ψ_i im Semi-Markoff-Fall eine der Struktur des Problems nicht angemessene Größe.◇

Zusammenhang der diskontierten mit den Durchschnittskosten

Zum Zusammenhang der diskontierten mit den Durchschnittskosten beweisen wir zwei Sätze. Der erste nutzt einen Abelschen Satz aus, der allgemeiner in §10 bewiesen wird (Lemma 10.10) und hier im Vorgriff zitiert werden soll:

Lemma 5.14.

Ist $d \geq 0$ oder gilt (4.8), so ist für alle $i \in I$

$$\underline{\Phi}_i \leq \underline{\lim_{\alpha\to 0}}\ \alpha V_{i,\alpha} \leq \overline{\lim_{\alpha\to 0}}\ \alpha V_{i,\alpha} \leq \overline{\Phi}_i \ .◇$$

Satz 5.15.

Sei $i \in I$ und K eine endliche Teilmenge von D mit $f^*(i,K) = 1$ und $\lim t^{-1} E_i K_{abs}(t \wedge T_\gamma) = 0$. Ferner gelte $d \geq 0$ oder (4.8), (4.10). Dann ist

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha V_{i,\alpha} = \lim_{t\to\infty} t^{-1} E_i K(t) = \Phi_i \ .$$

Beweis:

Das folgt aus Lemma 5.14 und Satz 5.1 mit (4.8) ⇒ (4.9) (siehe Bemerkung 4.11).◇

Lemma 5.16.

Sei $d \geq 0$. Für alle $\alpha > 0$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha S_{n+1}} d(Y_n,Y_{n+1}) = \alpha \int_0^\infty du\, e^{-\alpha u} \sum_{n=0}^{n(u)-1} d(Y_n,Y_{n+1}) \ .$$

Im Falle $d^- \not\equiv 0$ gilt die Beziehung auf $\{\omega \mid \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n(\omega)} < \infty\}$.

Beweis:

Es ist $e^{-\alpha t} = \alpha \int_t^\infty du\, e^{-\alpha u}$. Daher gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha S_{n+1}} d(Y_n, Y_{n+1}) = \int_0^{S_\infty -} n(dt) e^{-\alpha t} d(Y_{n(t)-1}, Y_{n(t)})$$

$$= \alpha \int_0^{S_\infty -} n(dt) d(Y_{n(t)-1}, Y_{n(t)}) \int_t^{\infty} du\, e^{-\alpha u}$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} du\, e^{-\alpha u} \int_0^{u} n(dt) d(Y_{n(t)-1}, Y_{n(t)}) [t < S_\infty]$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} du\, e^{-\alpha u} \sum_{n=0}^{n(u)-1} d(Y_n, Y_{n+1}) \quad .$$

Der Satz von Fubini ist nach Voraussetzung anwendbar.◇

Lemma 5.17.

Für $i,j \in I$, $t \geq 0$ ist $E_{\pi,i} N_j(t) = (f_{ij}^*/\mu_{jj}) \cdot t$.

Beweis:

Indiziert α die Klassen in D und ist $h_\alpha \in D_\alpha$, so gilt $E_{\pi,i} N_j(t) = \sum_\alpha f^*(i,D_\alpha) E_{\pi_{h_\alpha}} N_j(t)/\mu_{h_\alpha h_\alpha}$ (siehe (4.6)). Die Behauptung folgt daher aus Satz 3.9 und Lemma 2.23.◇

Der folgende Satz ist die Verallgemeinerung auf den Semi-Markoff-Fall von Lemma 2 in Hordijk (71). Stationäre Maße für den semi-regenerativen Prozeß wurden in erster Linie wegen dieses Satzes eingeführt.

Satz 5.18.

Sei $i \in I$. Im Fall $\bar{d} \neq 0$ gelte (4.10). Dann ist

$$\alpha E_{\pi,i} v_\alpha = \Phi_i \qquad (\alpha > 0).$$

Beweis:

Für den c-Teil folgt die Behauptung direkt aus der Stationarität von $P_{\pi,i}$ (Bemerkung 4.4):

$$\alpha E_{\pi,i} \int_0^{\infty} dt\, e^{-\alpha t} c(Z_t) = \alpha \int_0^{\infty} dt\, e^{-\alpha t} E_{\pi,i}\, c(Z_0) = E_{\pi,i} c(Z_0).$$

Zum Beweis für den d-Teil sei zunächst $d \geq 0$. Definiere

$$N_{jh}(u) := \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n = j, Y_{n+1} = h, S_n \leq u] \qquad (u \geq 0,\ j,h \in I).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} E_{\pi,i}\, N_{jh}(u) &= p_{jh}\, E_{\pi,i}\, N_j(u) && \text{(Korollar 2.14, (1.22))} \\ &= u\, p_{jh}\, f^*_{ij}/\mu_{jj} && \text{(Lemma 5.17).} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Wenn d beschränkt ist (sodaß $E_{\pi,i}\, d(Y_{n(u)}, Y_{n(u)+1}) = E_{\pi,i} d(Y_0, Y_1) < \infty$), hat man daher

$$\begin{aligned} &\alpha E_{\pi,i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha S_{n+1}}\, d(Y_n, Y_{n+1}) \\ &= \alpha^2\, E_{\pi,i} \int_0^{\infty} du\, e^{-\alpha u} \sum_{n=0}^{n(u)-1} d(Y_n, Y_{n+1}) && \text{(Lemma 5.16)} \\ &= \alpha^2 \int_0^{\infty} du\, e^{-\alpha u} E_{\pi,i}\Big[\sum_{j,h} d(j,h) N_{jh}(u) + d(Y_0, Y_1) \cdots d(Y_{n(u)}, Y_{n(u)+1})\Big] \\ &= \alpha^2 \int_0^{\infty} du\, e^{-\alpha u}\, u \sum_{j,h} d(j,h) p_{jh}\, f^*_{ij}/\mu_{jj} && (5.19) \\ &= \sum_j \bar{d}(j) f^*_{ij}/\mu_{jj}\ . \end{aligned}$$

Mit (4.3) folgt daraus die Behauptung für den d-Teil. Sie gilt auch für unbeschränktes $d \geq 0$, das ja durch beschränkte von unten approximiert werden kann.

Ist $d^- \not\equiv 0$, so kann das Ergebnis auf d^+ und d^- getrennt angewendet werden. Durch Subtraktion folgt dann die Behauptung des Satzes. Diese Subtraktion ist möglich, weil beide Subtrahenden endlich sind. Für Φ_i folgt das aus der Beschränktheit von d^- und (4.10), für $\alpha E_{\pi,i}\, v_\alpha$ aus dem bereits bewiesenen Teil (für $d \equiv 1$) und (4.10):

$$\alpha E_{\pi,i} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} = E_{\pi,i}[1/\eta_{Y_0}] \leq 1/\delta \qquad . \diamond \tag{5.20}$$

Bemerkung 5.21.

Fällt $d(Y_n,Y_{n+1}')$ zur Zeit S_n statt zur Zeit S_{n+1} an (vgl. Bemerkung 4.1), so ergibt sich aus dem Beweis von Satz 5.18: Unter der gleichen Voraussetzung ist

$$\alpha E_{\pi,i}\, v_\alpha = \Phi_i + \alpha E_{\pi,i} d(Y_o,Y_1) \qquad (i \in I,\ \alpha > 0).\diamond$$

Bemerkung 5.22.

Gleichung (3.23) aus der Theorie der zufälligen markierten Punktfolgen ermöglicht einen anderen Beweis von Satz 5.18 für den d-Teil. Dazu schreibt man $E_{\pi,i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha S_{n+1}} d(Y_n) = \rho_i \cdot {}_i^oE \int_0^{S_1} dt \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha(S_{n+1}-t)} d(Y_n)$ (siehe Bemerkung 3.21) und wendet die Invarianz von ${}_i^oE$ bzgl. θ_1 an (3.22). Auch zu Satz 5.1 läßt sich in der Theorie der Prozesse mit eingebettem Punktprozeß ein Analogon zeigen, siehe Franken (80), Theorem 4; vgl. dazu auch Formel (3.24).$\diamond$

§6 Stationäre Strategien

Im vorigen Paragraphen wurde die Darstellung

$$\underline{\Phi}_i = \overline{\Phi}_i = \Phi_i = \sum_j (f^*_{ij}/\mu_{jj}) \cdot \rho(j)$$

für die Durchschnittskosten bewiesen. Will man die Abhängigkeit der Φ_i von einem Parameter ("Strategie") untersuchen, so ist die Abhängigkeit der f^*_{ij}/μ_{jj} von diesem Parameter von zentraler Bedeutung. Wir geben in diesem Paragraphen äquivalente Bedingungen für die Stetigkeit von f^*_{ij}/μ_{jj} (Satz 6.18). Weiter zeigen wir, daß die analogen Bedingungen für den Markoff-Fall (Satz 6.29) in enger Beziehung zu diesen Bedingungen stehen (Satz 6.31).

Im folgenden ist F ein kompakter, metrischer Raum. Die W-Maße P_i auf (Ω,A) hängen von einem Parameter $f \in F$ ab, was durch einen oberen Index gekennzeichnet wird: P_i^f, entsprechend $Q_{ij}^f(t)$, $P_{\pi,i}^f$. Alle abgeleiteten Größen sind dann ebenfalls Funktionen von f: $p_{ij}(f)$, $\eta_j(f)$, $\mu_{jj}(f)$, $D(f)$, $\nu(f)$, usw.

Wir machen für diesen Paragraphen die generellen Annahmen

$$f \to p_{ij}(f) \quad \text{ist stetig} \quad (i,j \in I),$$
$$f \to \eta_j(f) \quad \text{ist stetig} \quad (j \in I).$$

Lemma 6.1.

$$\mu_{iK}(.) \quad \text{ist unterhalb stetig} \quad (i \in I,\ K \subset I).$$

Beweis:

Das folgt mit dem Lemma von Fatou aus $\mu_{iK} = \eta_i + \sum_{j \notin K} {}_K p^*_{ij}\, \eta_j$ (2.19) und Lemma A.14 a). ◇

Lemma 6.2.

Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(6.3) $\mu_{ii}(.)$ ist stetig $(i \in I)$

(6.4) $f^*_{ij}(.)/\mu_{jj}(.)$ ist stetig $(i,j \in I)$

Beweis:

(6.3) ⇒ (6.4): Nach Lemma A.14 a) ist f^*_{ij}/μ_{jj} unterhalb stetig. Die Oberhalbstetigkeit folgt aus Formel (2.24):

$$f^*_{ij}\,\eta_j/\mu_{jj} = 1 - \sum_{k\neq j} f^*_{ik}\,\eta_k/\mu_{kk} \quad .$$

(6.4) ⇒ (6.3): Sei $i \in I$, $f_n \in F$ mit $f_n \to f \in F$. O.B.d.A. ist $\mu_{ii}(f) < \infty$ (Lemma 6.1), also auch $f^*_{ii}(f) = 1$ (Lemma 2.22 und Generalannahme).

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\ \mu_{ii}(f_n) &\leq \overline{\lim}(\mu_{ii}(f_n)/f^*_{ii}(f_n))\\ &= 1/\underline{\lim}(f^*_{ii}(f_n)/\mu_{ii}(f_n))\\ &= 1/(f^*_{ii}(f)/\mu_{ii}(f))\\ &= \mu_{ii}(f)\end{aligned}$$

Daher ist μ_{ii} oberhalbstetig im Punkt f, nach Lemma 6.1 also sogar stetig. ◇

Straffheitsbedingungen

Lemma 6.5.

Für die Aussagen

(6.6) $\nu(.)$ ist unterhalb stetig, und für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Menge $K \subset I$ mit
$\sum_{i\in K} \eta_i(f)/\mu_{ii}(f) \geq \nu(f) - \varepsilon \qquad (f \in F)$;

(6.7) $\mu_{ii}(.)$ ist stetig $(i \in I)$;

(6.8) $\nu(.)$ ist unterhalb stetig, und für alle $h \in I$ ist $\{i \to f^*_{hi}(f)\eta_i(f)/\mu_{ii}(f) \mid f \in F\}$ eine straffe Familie von W-Maßen auf I;

gelten die Beziehungen (6.6) ⇒ (6.7) ⇒ (6.8).

Beweis:

(6.6) ⇒ (6.7): Sei (f_n) eine Folge in F, die gegen ein $f \in F$

konvergiert. Wähle eine Teilfolge (f_{n_k}), sodaß für alle $i \in I$

$\gamma_i := \lim_k \eta_i(f_{n_k})/\mu_{ii}(f_{n_k})$ existiert. Nach Lemma 6.1 ist

$0 \leq \gamma_i \leq \eta_i(f)/\mu_{ii}(f)$. Sei $\varepsilon > 0$ und K wie in (6.6). Es gilt

$$\begin{aligned}
\nu(f) &\leq \underline{\lim}\, \nu(f_{n_k}) && (6.6)\\
&\leq \overline{\lim}\, \nu(f_{n_k}) \\
&\leq \overline{\lim} \sum_{i\in K} \eta_i(f_{n_k})/\mu_{ii}(f_{n_k}) + \varepsilon && (6.6)\\
&\leq \sum_{i\in K} \gamma_i + \varepsilon && (\text{Def. von } \gamma_i)\\
&\leq \sum_{i\in I} \gamma_i + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i\in I} \eta_i(f)/\mu_{ii}(f) + \varepsilon \\
&= \nu(f) + \varepsilon && (\text{Kor. } 2.25)
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\sum_i \gamma_i = \sum_i \eta_i(f)/\mu_{ii}(f) < \infty$, und daher $\gamma_i = \eta_i(f)/\mu_{ii}(f)$ $(i \in I)$. Weil (f_{n_k}) als Teilfolge einer beliebigen anderen Teilfolge von (f_n) gewählt werden kann, beweist das $\lim_n \eta_i(f_n)/\mu_{ii}(f_n)$ $= \eta_i(f)/\mu_{ii}(f)$ $(i \in I)$, woraus (6.7) folgt.

(6.7) $\Rightarrow$ (6.8): Die Unterhalbstetigkeit von $\nu(.)$ ist klar (Korollar 2.25). Sei (K_n) eine aufsteigende Folge von endlichen Teilmengen von I mit $\cup K_n = I$. Die Funktionen $\sum_{i\in K_n} f^*_{h_i}(.)\eta_i(.)/\mu_{ii}(.)$ sind stetig (Lemma 6.2) und gehen mit wachsendem n monoton steigend gegen die Konstante 1 (2.24). Da F kompakt ist, folgt daraus die Behauptung mit dem Satz von Dini (Satz A.4).◇

Ist ν identisch gleich 1, so fallen die Straffheitsbedingungen in (6.6) und (6.8) offenbar zusammen. Insbesondere ist dann (6.8) äquivalent zu (6.7) (vgl. Hordijk (74), Lemma 10.2 und Federgruen et al. (78a), Theorem 2.1 für den Markoff-Fall). Hordijk (74), S. 84

behauptet (für den Markoff-Fall), daß (6.7) aus (6.8) schon dann folgt, wenn $\nu(.)$ beschränkt ist. Wir können diese Aussage nur mit einer Zusatzvoraussetzung beweisen. Dazu untersuchen wir im folgenden Lemma den Zusammenhang von (6.6) und (6.8).

Lemma 6.9.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(6.10) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subset I$, K endlich, $\forall f \in F \quad \sum_{i \in K} \eta_i(f)/\mu_{ii}(f) \geq \nu(f) - \varepsilon$;

(6.11) $\{i \to f^*_{hi}(f)\eta_i(f)/\mu_{ii}(f) \mid f \in F, h \in I\}$ ist eine straffe Familie von W-Maßen auf I;

(6.12) es existiert eine endliche Menge $K \subset I$ mit
$f^*(i,K)(f) = 1 \qquad (f \in F, i \in I)$,
und für $h \in K$ ist $\{i \to f^*_{hi}(f)\eta_i(f)/\mu_{ii}(f) \mid f \in F\}$ eine straffe Familie von W-Maßen auf I.

Beweis:

Aussage (6.10) ist äquivalent zu

(6.13) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subset I$ endlich $\forall f \in F$, $\alpha \quad \sum_{i \in K \cap D_\alpha(f)} \eta_i(f)/\mu_{ii}(f) \geq 1 - \varepsilon$

Dabei indiziert α die rekurrenten Klassen in D(f). (Man beachte, daß (6.13) die Beschränktheit von ν impliziert). Nun ist (6.13) gleichbedeutend mit

(6.14) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K$ endlich $\forall f \in F$, $h \in D(f)$

$$\sum_{i \in K} f^*_{hi}(f)\eta_i(f)/\mu_{ii}(f) \geq 1 - \varepsilon.$$

Wegen der Generalannahme kann dabei "$h \in D(f)$" durch "$h \in I$" ersetzt werden (vgl. (4.3) und (4.7) für $\rho(j) = \eta_j$). Das zeigt die Äquivalenz von (6.10) und (6.11).

Aus (6.12) folgt die Straffheit der Familie $\{i \to f^*_{hi}(f)\eta_i(f)/\mu_{ii}(f) \mid f \in F, h \in K\}$. Weil K mit jeder Rekurrenzklasse von D(f) einen nicht-leeren Schnitt hat, impliziert das (6.14) und damit (6.11). Zum Beweis von "(6.11) $\Rightarrow$ (6.12)" braucht nur die Existenz einer endlichen Menge K mit

(6.15) $f^*(i,K)(f) = 1 \qquad (f \in F,\ i \in I)$

gezeigt zu werden. Man wählt sie gemäß der Straffheitsaussage so, daß $\sum_{i \in K} f^*_{hi}(f)\eta_i(f)/\mu_{ii}(f) > 0 \quad (f \in F,\ i \in I)$. Dann existiert für alle $f \in F$, $h \in D(f)$ ein $i \in K$ mit $f^*_{hi}(f) > 0$. Daher hat K mit jeder rekurrenten Klasse in D(f) einen nicht-leeren Schnitt. Unter Berücksichtigung der Generalannahme impliziert das (6.15).◇

Rekurrenz in der endlichen Menge K

Lemma 6.9 zeigt, daß die Aussagen (6.6) bis (6.8) in Lemma 6.5 äquivalent sind, falls es eine endliche Menge K mit (6.15) gibt. Letzteres bedeutet, daß K jede Klasse von D(f) für alle $f \in F$ schneidet, daß also bei variierendem f nicht ganze Klassen von D(f) "ins Unendliche wandern" können. Daher ist (6.15) auch äquivalent zu $f^*(i,K) > 0 \quad (f \in F,\ i \in I)$. Diese Annahme wird auch bei den folgenden Lemmata nützlich sein, indem sie gestattet, Untersuchungen über Anzahl und Lage der Klassen in D(f) bei variierendem f auf die endliche Menge K zurückzuführen.

Lemma 6.16.

Sei ν unterhalb stetig, $U'(f_o)$ eine Umgebung einer Strategie $f_o \in F$ und K eine endliche Teilmenge von $D(f_o)$ mit $f^*(i,K)(f) = 1$ $(f \in U'(f_o),\ i \in I)$. Dann gibt es eine Umgebung $U(f_o)$ von f_o mit

$$K \cap D_h(f) = K \cap D_h(f_o) \qquad (f \in U(f_o),\ h \in K).$$

Beweis:

Die rekurrenten Klassen in $D(f_o)$ seien mit $\alpha = 1,\ldots,\nu_o := \nu(f_o)$ indiziert. Definiere $U(f_o) := U'(f_o) \cap \{f|\nu(f) \geq \nu_o\} \cap \{f|\forall \alpha = 1,\ldots,\nu_o;\ i,j \in K \cap D_\alpha(f_o)\ f^*_{ij}(f) > 0 \text{ und } f^*_{ji}(f) > 0\}$. Wegen der Unterhalbstetigkeit von ν und von $f^*_{ij}(.)$ (Lemma A.14 a)) ist $U(f_o)$ eine offene Umgebung von f_o. Für alle $f \in U(f_o)$ und $\alpha \in \{1,\ldots,\nu_o\}$ gilt dann: $K \cap D_\alpha(f_o)$ enthält höchstens eine (bzgl. der EMK unter f) abgeschlossene Klasse in D(f). Es gibt also

auch höchstens ν_o Klassen in $D(f)$, d.h. $\nu(f) \leq \nu_o$. Mit $\nu(f) \geq \nu_o$ folgt daraus, daß $K \cap D_\alpha(f_o)$ genau eine (bzgl. f) rekurrente Klasse enthält; hier geht die Voraussetzung ein, daß K alle Klassen in $D(f)$ schneidet und daß $K = \bigcup_\alpha K \cap D_\alpha(f_o)$. Für alle $h \in K \cap D_\alpha(f_o)$ gilt demnach $K \cap D_h(f) = K \cap D_\alpha(f_o)$ $(\alpha \in \{1,\ldots,\nu_o\})$. Das ist die Behauptung.◇

Während in Lemma 6.9 die endliche Menge K nur (6.15) zu erfüllen braucht, ist es für Lemma 6.16 wesentlich, daß auch $K \subset D(f_o)$ gilt. Im folgenden Lemma zeigen wir, daß K für jedes f_o entsprechend verkleinert werden kann.

Lemma 6.17.

Existiert eine endliche Menge K mit (6.15), so gibt es für jedes $f_o \in F$ eine Umgebung $U(f_o)$ mit

$$f^*(i,K \cap D(f_o))(f) = 1 \qquad (f \in U(f_o),\ i \in I).$$

Beweis:

Setze $U(f_o) := \{f \mid \forall j \in K \quad f^*(j,K \cap D(f_o))(f) > 0\}$. Die Annahme (6.15) und die Generalannahme implizieren $f_o \in U(f_o)$. Wegen der Unterhalbstetigkeit von $f^*(j,K \cap D(f_o))(.)$ (Lemma A.14 a)) ist $U(f_o)$ offen. Für $f \in U(f_o)$, $i \in I$ gilt

$$\begin{aligned} f^*(i,K \cap D(f_o))(f) &\geq P_i^f\{\tau_{K\cap D(f),1} \leq \tau_{K\cap D(f_o),1} < \infty\} \\ &= \sum_{j \in K\cap D(f)} {}_{K\cap D(f)}p^*_{ij}(f) f^*(j,K \cap D(f_o))(f) \\ &= \sum_{j \in K\cap D(f)} {}_{K\cap D(f)}p^*_{ij}(f) \cdot 1 \\ &= f^*(i,K \cap D(f))(f) = 1 \end{aligned}$$

wegen (6.15) und der Generalannahme.◇

Lemma 6.16 und 6.17 werden für den Beweis von "(6.22) ⇒ (6.20)" im folgenden Satz benötigt.

Äquivalente Aussagen zur Stetigkeit von $f^*_{hi}(.)/\mu_{ii}(.)$

Satz 6.18.

Es existiere eine endliche Menge K mit $f^*(i,K)(f)=1$ $(f \in F,\ i \in I)$.
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(6.19) $f^*_{hi}(.)/\mu_{ii}(.)$ ist stetig $(h,i \in I)$;

(6.20) $\mu_{ii}(.)$ ist stetig $(i \in I)$;

(6.21) $\forall f_o \in F$, $i \in D(f_o)$, $J \subset I$ mit $J \cap D_i(f_o) \neq \emptyset$:
$\mu_{iJ}(.)$ ist stetig und endlich in f_o;

(6.22) $\nu(.)$ ist unterhalb stetig, und $\mu_{iK}(.)$ ist stetig $(i \in K)$;

(6.23) $\nu(.)$ ist unterhalb stetig, und für alle $f_o \in F$, $i \in K \cap D(f_o)$ gilt:
$f \to \sum_{j \notin K} {}^K p^{(n)}_{ij}(f)\eta_j(f)$ ist in $f = f_o$ endlich und stetig $(n \in \mathbb{N})$,
$\sum_{j \notin K} {}^K p^{(n)}_{ij}(.)\mu_{jK}(.) \to 0$ gleichmäßig in einer Umgebung von f_o;

(6.24) $\nu(.)$ ist unterhalb stetig, und für alle $f_o \in F$, $i \in K \cap D(f_o)$ gilt:
$f \to \sum_{j \notin K} {}^K p^{(n)}_{ij}(f)\eta_j(f)$ ist in $f = f_o$ endlich und stetig $(n \in \mathbb{N})$,
$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \notin K} {}^K p^{(n)}_{ij}(f)\eta_j(f)$ konvergiert gleichmäßig in einer Umgebung von f_o;

(6.25) $\nu(.)$ ist unterhalb stetig und $\{j \to f^*_{ij}(f)\eta_j(f)/\mu_{jj}(f) \mid f \in F\}$ ist eine straffe Familie von W-Maßen auf I $(i \in K)$.

Jede dieser Aussagen impliziert, daß $\nu(.)$ stetig und daher auf jeder zusammenhängenden Teilmenge von F konstant ist.

Beweis:

(6.19) $\leftrightarrow$ (6.20): Das ist Lemma 6.2.

(6.20) $\rightarrow$ (6.21): Sei $f_o \in F$, $i \in D(f_o)$ und $J \subset I$ mit $i \in J$. Aus der Darstellung $e_{ih}\eta_h = \mu_{ii} - \sum_{j \neq h} e_{ij}\eta_j$ (2.20) folgt die Oberhalbstetigkeit und daher die Stetigkeit (Lemma A.14 a)) von $e_{ih}(.)$

$(h \in I)$. Es gilt

$$\mu_{iJ} = \eta_i + \sum_{j \notin J} {}_J p^*_{ij}\, \eta_j \leq \eta_i + \sum_{j \neq i} e_{ij}\, \eta_j = \mu_{ii}$$

wegen (2.19), (2.20) und ${}_J p^*_{ij} \leq {}_i p^*_{ij} = e_{ij}$. Daraus folgt die Stetigkeit von $\mu_{iJ}(.)$ in f_o mit Korollar A.2 und Lemma A.14 d). Ist $i \notin J$, so gilt $\mu_{iJ} = \mu_{i,J\cup\{i\}} \cdot (1 + {}_J p^*_{ii})$ (2.18). Die Stetigkeit von $\mu_{iJ}(.)$ in f_o folgt dann aus der gerade bewiesenen Stetigkeit von $\mu_{i,J\cup\{i\}}(.)$ und aus Lemma A.14 b) $(f^*(i,J)(f_o) = 1$ wegen $J \cap D_i(f_o) \neq \emptyset)$.

(6.21) $\Rightarrow$ (6.22): Die Unterhalbstetigkeit von $\nu(.)$ folgt aus Korollar 2.25. Der Rest ist klar.

(6.22) $\Rightarrow$ (6.20): Sei zunächst $i \in K$. Wir zeigen die Stetigkeit von $\mu_{ii}(.)$ in einem $f_o \in F$. O.B.d.A. ist $\mu_{ii}(f_o) < \infty$ (Lemma 6.1). Für alle $j \in K$ gilt: $f^*(j, K \cap D(f_o))(f_o) \geq P_j^{f_o}\{\tau_{D(f_o),1} \leq \tau_{K\cap D(f_o),1} < \infty\}$ $= \sum_{h \in D(f_o)} {}_{D(f_o)} p^*_{jh}(f_o) \cdot P_h^{f_o}\{\tau_{K\cap D(f_o),1} < \infty\} = 1$. Daher ist auf die Darstellung (2.18)

$$\mu_{j,K\cap D(f_o)} = \mu_{jK} + \sum_{h \in K \setminus D(f_o)} {}_{K\cap D(f_o)} p^*_{jh} \mu_{hK}$$

Lemma A.14 b) anwendbar, und $\mu_{j,K\cap D(f_o)}(.)$ ist stetig in f_o $(j \in K)$. Nach Lemma 6.17 ist in einer Umgebung von f_o $f^*(i, K \cap D(f_o))(.) = 1$ $(i \in I)$. Daher ist Lemma 6.16 anwendbar, und man hat in einer (kleineren) Umgebung $U(f_o)$:

$$K \cap D(f_o) \cap D_i(f) = K \cap D_i(f_o) \qquad (f \in U(f_o),\ i \in K \cap D(f_o)).$$

Mit (2.18) ergibt das für $f \in U(f_o)$

$$\begin{aligned} \mu_{ii}(f) &= \mu_{i,K\cap D(f_o)}(f) + \sum_{j \in (K\cap D(f_o)) \setminus \{i\}} e_{ij}(f)\, \mu_{j,K\cap D(f_o)}(f) \\ &= \mu_{i,K\cap D(f_o)}(f) + \sum_{j \in K \cap D_i(f_o) \setminus \{i\}} e_{ij}(f)\, \mu_{j,K\cap D(f_o)}(f). \end{aligned}$$

Wendet man hierauf Lemma A.14 c) an, so erhält man die Stetigkeit von $\mu_{ii}(.)$ in f_o.

Ist jetzt $i \in I$ beliebig und O.B.d.A. $\mu_{ii}(f_o) < \infty$ (Lemma 6.1), so existiert nach Annahme über K ein $j \in K \cap D_i(f_o)$. Nach Lemma A.14 c) ist $e_{ij}(.)$ stetig in f_o. Insbesondere ist $0 < e_{ij}(f) < \infty$ für alle f aus einer Umgebung von f_o. Für diese f gilt also $j \in D_i(f)$ und daher $\mu_{ii} = e_{ij}\mu_{jj}$ (Lemma 2.23). Daraus folgt die Stetigkeit von $\mu_{ii}(.)$ in f_o.

(6.22) $\Leftrightarrow$ (6.23) $\Leftrightarrow$ (6.24): Diese Äquivalenzen beruhen auf der Formel (2.17):

$$\mu_{iK} = \eta_i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(m)} \, \eta_j$$

$$= \eta_i + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(m)} \, \eta_j + \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(n)} \, \mu_{jK} \, .$$

Aus ihr folgt sofort die Äquivalenz von (6.23) und (6.24) und die Implikation "(6.24) $\Rightarrow$ (6.22)", wenn in (6.22) die Aussage "$\mu_{iK}(.)$ ist stetig ($i \in K$)" ersetzt wird durch "$\mu_{iK}(.)$ ist stetig in f_o ($f_o \in F$, $i \in K \cap D(f_o)$)". Diese Abschwächung ist aber äquivalent zu (6.20) - (6.22), wie der letzte Teil des Beweises von "(6.22) $\Rightarrow$ (6.20)" zeigt. Demnach braucht nur noch "(6.22) $\Rightarrow$ (6.23)" gezeigt zu werden.

Sei also $f_o \in F$ und $i \in K \cap D(f_o)$. Offenbar gilt $\mu_{iK}(f_o) \leq \mu_{ii}(f_o) < \infty$. Nach Voraussetzung gibt es eine kompakte Umgebung C von f_o, auf der $\mu_{iK}(.)$ endlich und stetig ist. Setze $\gamma_n := \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(n)} \, \eta_j$, $\beta_n := \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(n)} \, \mu_{jK}$ ($n \in \mathbb{N}$). Nach Formel (2.19) ist $\mu_{iK} = \eta_i + \sum_{m=1}^{n-1} \gamma_m + \beta_n$. Weil β_n und die γ_m unterhalb stetig sind (Lemma 6.1 und Lemma A.13), folgt daraus die Stetigkeit aller γ_n und β_n ($n \in \mathbb{N}$) auf C. Das beweist den ersten Teil von (6.23). Nach (2.19) bilden die β_n eine monoton nicht-steigende Folge von auf C stetigen Funktionen, mit Grenzwert 0 wegen der Endlichkeit von μ_{iK}. Die Konvergenz ist daher nach dem Satz von

Dini (Satz A.4) gleichmäßig auf C, und das beweist den zweiten Teil von (6.23).

(6.20) ⇔ (6.25): Das folgt unmittelbar aus Lemma 6.5 und Lemma 6.9.

(6.20) ⇒ "$\nu(.)$ ist stetig": Das wurde implizit im Beweis von Lemma 6.5, "(6.6) ⇒ (6.7)" gezeigt. Um deutlich zu machen, wie hier die Annahme über K eingeht, bringen wir noch einen zweiten Beweis. Sei dazu $f_o \in F$ und $K \cap D(f_o) = \{h_1,\ldots,h_n\}$. Nach Lemma 6.17 gibt es eine Umgebung $U(f_o)$ mit $f^*(i,K \cap D(f_o))(f) = 1$ $(f \in U(f_o)$, $i \in I)$. O.B.d.A. ist $K \cap D(f_o) \subset D(f)$ für $f \in U(f_o)$, wegen der Stetigkeit von $\mu_{ii}(.)$. Wie man sich leicht klar macht, gilt daher

$$\nu(f) = \sum_{r=1}^{n} \prod_{s=1}^{r-1} (1 - f^*_{h_r h_s}(f)) \qquad (f \in U(f_o)).$$

Mit Lemma A.14 a) folgt daraus die Oberhalbstetigkeit von $\nu(.)$ in f_o. Die Unterhalbstetigkeit ergibt sich aus Korollar 2.25.◇

Korollar 6.26.

Sei I endlich. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

—— $\mu_{ii}(.)$ ist stetig $(i \in I)$;

—— $\nu(.)$ ist unterhalb stetig;

—— $\nu(.)$ ist stetig.

Beweis:

In Satz 6.18 kann K = I gewählt werden; seine Aussage reduziert sich dann auf die behaupteten Äquivalenzen. Die zweite ist übrigens unmittelbar einsichtig, weil $\nu = \sum_{i \in I} \eta_i/\mu_{ii}$ (Korollar 2.25) im endlichen Fall immer oberhalb stetig ist (Lemma 6.1).◇

Bemerkung 6.27.

Im Beweis von Satz 6.18 wurde die Existenz einer endlichen Menge K, die unter allen Strategien von jedem Startpunkt aus mit Wahrscheinlichkeit 1 erreicht werden kann, nur für die Implikationen

"(6.22) ⇒ (6.20)" und "(6.25) ⇒ (6.20)" und für den Nachweis der Stetigkeit von $\nu(.)$ benötigt. Insbesondere sind die Implikationen "(6.20) ⇒ (6.21)" und "(6.20) ⇒ (6.25)" auch ohne jene Voraussetzung gültig. ◇

Bemerkung 6.28.

Ist $\sup\{\eta_i(f) \mid i \in I,\ f \in F\} < \infty$, so gilt die erste Aussage in (6.23) automatisch für beliebige $K \subset I$ (Korollar A.2). Im allgemeinen ist das jedoch nicht der Fall. Dazu das folgende Gegenbeispiel: Sei $F := [0,1]$, $I := \mathbb{N}_0$, $K := \{0\}$,

$$(p_{ij}(f)) := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

$$(\eta_i(f)) := \begin{pmatrix} 1 + f \\ 1 + f(2 - f) \\ 1 + f(2 - f)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\sum_{j \neq 0} {}_0p_{0j}(f)\eta_j(f) = 1 + (2-f)[f > 0]$ unstetig in $f = 0$.

Die Rückkehrzeit $\mu_{00}(f) = 2 + 2 \cdot [f > 0]$ ist ebenfalls unstetig in $f = 0$.

Das Beispiel läßt sich leicht modifizieren, um zu zeigen, daß in (6.23) die erste Aussage tatsächlich für alle $n \in \mathbb{N}$ gefordert werden muß. ◇

Markoffketten als Spezialfall

Durch Spezialisierung erhält man einen zu Satz 6.18 analogen Satz für Markoffketten ($P_i^f\{S_n = n\} = 1$ $(i \in I,\ f \in F,\ n \in \mathbb{N}_0)$). Dabei beachte $\pi_{ij} = f_{ij}^*/m_{jj}$ $(i,j \in I)$ (A.6).

Satz 6.29.

Es existiere eine endliche Menge K mit $f^*(i,K)(f) = 1$ $(f \in F, i \in I)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $\pi_{ij}(.)$ ist stetig $(i,j \in I)$;
- $m_{ii}(.)$ ist stetig $(i \in I)$;
- $\forall f_o \in F$, $i \in D(f_o)$, $J \subset I$ mit $J \cap D_i(f_o) \neq \emptyset$: $m_{iJ}(.)$ ist stetig und endlich in f_o;
- $\nu(.)$ ist unterhalb stetig, und $m_{iK}(.)$ ist stetig $(i \in K)$;
- $\nu(.)$ ist unterhalb stetig, und für alle $f_o \in F$, $i \in K \cap D(f_o)$ gilt: $\sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(n)}(.) m_{jK}(.) \downarrow 0$ gleichmäßig in einer Umgebung von f_o;
- $\nu(.)$ ist unterhalb stetig, und für alle $f_o \in F$, $i \in K \cap D(f_o$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} P_i^f\{\tau_{K1} > n\}$ konvergiert gleichmäßig in einer Umgebung von f_o;
- $\nu(.)$ ist unterhalb stetig, und $\{j \to \pi_{ij}(f) \mid f \in F\}$ ist eine straffe Familie von W-Maßen auf I $(i \in K)$.

Jede dieser Aussagen impliziert, daß $\nu(.)$ stetig und daher auf jeder zusammenhängenden Teilmenge von F konstant ist. ◇

Korollar 6.30.

Ist I endlich, so gilt:

$\pi_{ij}(.)$ ist stetig $(i,j \in I) \Leftrightarrow \nu(.)$ ist stetig. ◇

Dies ist ein bekanntes Ergebnis, siehe Schweitzer (68), Theorem 5.

Zusammenhang von Satz 6.18 und Satz 6.29

Satz 6.31.

Es existiere eine endliche Menge K mit $f^*(i,K)(f) = 1$ $(f \in F, i \in I)$.

a) Gibt es ein $\delta > 0$ mit $\eta_i(f) \geq \delta$ $(f \in F, i \in I)$, so impliziert

jede der Aussagen in Satz 6.18 die Aussagen in Satz 6.29.

b) Gibt es ein $M < \infty$ mit $\eta_i(f) \leq M$ $(f \in F, i \in I)$, so impliziert jede der Aussagen in Satz 6.29 die Aussagen in Satz 6.18.

Beweis:

a) Sei $f_o \in F$ fest. Ist $i \notin D(f_o)$, so ist $m_{ii}(.)$ in f_o stetig (Lemma 6.1). Ist $i \in D(f_o)$, so gilt nach Formel (2.20)

$$\delta \cdot m_{ii}(f) = \delta \cdot \sum_j e_{ij}(f) \leq \sum_j e_{ij}(f)\eta_j(f) = \mu_{ii}(f) \quad (i \in I,\ f \in F).$$

Aus der Stetigkeit von $\mu_{ii}(.)$ in f_o folgt daher die Stetigkeit von $m_{ii}(.)$ in f_o (Korollar A.2).

b) wird analog bewiesen.◇

§7 Durchschnittsoptimalität unter den stationären Strategien

In diesem Paragraphen wird die Abhängigkeit der Durchschnittskosten $\Phi_i(f)$ von der Strategie $f \in F$ untersucht. Es wird gezeigt, daß $\Phi_i(.)$ unterhalb stetig ist, wenn die folgenden naheliegenden Annahmen gemacht werden:

$$
\begin{aligned}
&f \to p_{ij}(f) \quad \text{ist stetig} \quad (i,j \in I)\,, \\
&f \to \eta_i(f) \quad \text{ist stetig} \quad (i \in I)\,, \\
&f \to \mu_{ii}(f) \quad \text{ist stetig} \quad (i \in I), \\
&f \to \rho(i,f) \quad \text{ist unterhalb stetig} \quad (i \in I).
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

Es folgt die Existenz einer Strategie f^*, die $\Phi_i(.)$ minimiert. Ergänzend zu den Sätzen des vorigen Paragraphen werden zwei hinreichende Voraussetzungen für die Stetigkeit von $\mu_{ii}(.)$ angegeben.

In §10 wird die folgende Bedingung und das Lemma 7.4 benötigt.

Bedingung 7.2.

$f \to \rho(i,f)$ ist stetig $(i \in I)$, und es gilt

$$\|c\| < \infty \quad \text{und} \quad \|d\| < \infty\,. \tag{7.3}$$

Lemma 7.4.

Es existiere $M < \infty$ und $\alpha_o > 0$ mit $\alpha E_i^f \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} \le M$ $(i \in I,$ $f \in F,\ \alpha \in (0,\alpha_o])$, und es gelte (7.3). Dann ist

$$\sup\{|\alpha V_{i,\alpha}(f)| \mid \alpha \in (0,\alpha_o],\ f \in F,\ i \in I\} < \infty\,.$$

Beweis:

Offenbar ist $|\alpha V_{i,\alpha}(f)| \le \|c\| + \|d\| \alpha E_i^f \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n}$. Daraus folgt die Behauptung.◇

Unterhalbstetigkeit von $\Phi_i(.)$

Satz 7.5.

Es gelte $d \ge 0$ oder

(7.6) $\inf\{\eta_i(f) \mid i \in I,\ f \in F\} > 0$.

a) Die Stetigkeitsannahmen (7.1) implizieren, daß $\Phi_i(.)$ unterhalb stetig ist ($i \in I$).

b) Gilt zusätzlich Bedingung 7.2 und (7.6), so implizieren die Annahmen (7.1) sogar die Stetigkeit von $\Phi_i(.)$ ($i \in I$).

Beweis:

Wir benutzen die Darstellung (siehe (4.3))

$$\Phi_i = \sum_j (f^*_{ij}\, \eta_j/\mu_{jj}) \cdot (\rho(j)/\eta_j) \ .$$

Ist $c \geq 0$, $d \geq 0$, so folgt die Behauptung a) aus (7.1) mit Hilfe von Lemma 6.2 (μ_{jj} stetig $\Rightarrow f^*_{ij}/\mu_{jj}$ stetig) und mit dem Lemma von Fatou. Gilt Bedingung 7.2 und (7.6), so ist $\sup\{|\rho(j,f)/\eta_j(f)| \mid j \in I,\ f \in F\} < \infty$. Daher kann die Stetigkeit von Φ_i mit Korollar A.3 gefolgert werden. (Beachte: $\sum_j f^*_{ij}\eta_j/\mu_{jj} = 1$ nach (2.24).) Die Anwendung dieser beiden Ergebnisse liefert die Behauptung in a) für den allgemeinen Fall, indem man $\| c^- \|$ und $\| d^- \|$ zu c und d addiert.◇

Korollar 7.7.

Für jedes $i \in I$ existiert eine in F durchschnittsoptimale Strategie $f^* \in F$, d.h. $\Phi_i(f^*) = \Phi_i^* := \inf\{\Phi_i(f) \mid f \in F\}$.

Beweis:

Das folgt aus Satz 7.5 mit der Kompaktheit von F.◇

Stetigkeit anderer Größen unter $P_{\pi,i}$

Das folgende Lemma wird in §10 benötigt.

Lemma 7.8.

Zusätzlich zu den Stetigkeitsannahmen (7.1) gelte:

$$f \to \int_0^\infty dt(p_{ij}(f) - Q^f_{ij}(t)) = E^f_i[Y_1=j, S_1] \text{ ist stetig } (i,j \in I)$$

a) Für $i,j \in I$, $f_n \in F$, $f_n \to f \in F$ gilt

$$P^{f_n}_{\pi,i}\{Y_1 = j\} \to P^{f}_{\pi,i}\{Y_1 = j\}.$$

b) Gelte zusätzlich eine der beiden folgenden Voraussetzungen

—— $f \to E^f_i g(Y_1,S_1) = \sum_j \int_0^\infty Q^f_{ij}(dt)g(j,t)$ ist stetig für alle $i \in I$ und alle stetigen und beschränkten Funktionen $g: I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$;

—— $\int_0^\infty dt \sup_{f\in F} (p_{ij}(f) - Q^f_{ij}(t)) < \infty \qquad (i,j \in I).$

Sei $i,j \in I$, $f_n \in F$, $f_n \to f \in F$, $\alpha_n \downarrow 0$. Dann gilt

$$E^{f_n}_{\pi,i}[e^{-\alpha_n S_1}, Y_1 = j] \to P^f_{\pi,i}\{Y_1 = j\}.$$

Beweis:

Wegen Lemma 6.2 ist $f^*_{ij}(.)/\mu_{jj}(.)$ stetig $(i,j \in I)$, und es gilt $\sum_j f^*_{ij}\,\eta_j/\mu_{jj} = 1$ (2.24).

a) $$P_{\pi,i}\{Y_1 = j\} = \sum_{h\in I} f^*_{ih} \int_0^\infty dt(p_{hj} - Q_{hj}(t))/\mu_{hh}$$

nach Definition von $P_{\pi,i}$ und (1.26). Die Unterhalbstetigkeit von $f \to P^f_{\pi,i}\{Y_1 = j\}$ folgt daher mit dem Lemma von Fatou. Wegen $P_{\pi,i}\{Y_1 = j\} = 1 - \sum_{h\neq j} P_{\pi,i}\{Y_1 = h\}$ gilt dann auch die Oberhalbstetigkeit.

b) $$E_{\pi,i}[e^{-\alpha S_1}, Y_1 = j] = \sum_{h\in I} f^*_{ih} E_h[(1 - e^{-\alpha S_1})/\alpha, Y_1 = j]/\mu_{hh}$$

nach Definition von $P_{\pi,i}$, (1.25) und (1.26). Es gilt

$$\sup\{E^f_h[(1 - e^{-\alpha S_1})/\alpha,\ Y_1 = j]/\eta_h(f) \mid h \in I,\ f \in F,\ \alpha > 0\} \leq 1,$$

denn $1-e^{-\alpha S_1} \leq \alpha S_1$. Die Behauptung folgt also mit Korollar A.3 aus

$$\lim_{n\to\infty} E_h^{f_n}[(1 - e^{-\alpha_n S_1})/\alpha_n,\ Y_1 = j] = \int_0^\infty dt(p_{hj}(f) - Q_{hj}^f(t)).$$

Letzteres sieht man folgendermaßen. Die linke Seite ist gleich

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty Q_{hj}^{f_n}(dt)(1 - e^{-\alpha_n t})/\alpha_n \quad .$$

Gilt nun die erste Voraussetzung unter b), so kann eine Verallgemeinerung des Satzes von der majorisierten Konvergenz angewendet werden (Langen (79), Satz 3.9), denn $(1 - e^{-\alpha_n t})/\alpha_n$ ist durch t beschränkt, und für $t_n \to t$ hat man $(1 - e^{-\alpha_n t_n})/\alpha_n \to t$. Der Grenzwert ist deshalb gleich $\int_0^\infty Q_{hj}^f(dt)t$; das beweist die Behauptung.

Ist andererseits die zweite Voraussetzung unter b) erfüllt, so rechnet man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty Q_{hj}^{f_n}(dt)(1 - e^{-\alpha_n t})/\alpha_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty Q_{hj}^{f_n}(dt) \int_0^t du\, e^{-\alpha_n u} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\alpha_n u}(p_{hj}(f_n) - Q_{hj}^{f_n}(u))\, du \\
&= \int_0^\infty du(p_{hj}(f) - Q_{hj}^f(u)) - \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty du(1 - e^{-\alpha_n u})(p_{hj}(f_n) - Q_{hj}^{f_n}(u))
\end{aligned}$$

aufgrund der zusätzlichen Stetigkeitsannahme. Der zweite Summand ist dem Betrage nach $\leq \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty du(1 - e^{-\alpha_n u}) \sup_f (p_{hj}(f) - Q_{hj}^f(u)) = 0$ (Satz von der majorisierten Konvergenz). ◇

Hinreichende Bedingungen für die Stetigkeit von μ_{ii}

Der folgende Satz gibt hinreichende Bedingungen für die Aussagen (6.19) bis (6.25) in Satz 6.18. Bedingungen der Form (7.10) werden Liapunoff-Bedingungen genannt; y heißt Liapunoff-Funktion. In der Theorie der dynamischen Programmierung wurden sie zuerst von Hordijk (74) untersucht. In Hordijk's Theorem 5.1 wird die Existenz einer durchschnittsoptimalen Politik in einem

Semi-Markoff-Modell bewiesen. Die Voraussetzungen dort entsprechen denen des folgenden Satzes, wobei K einelementig ist. Vgl. auch Federgruen et al. (79), Formel (29) und unsere Diskussion in §12.

Satz 7.9.

Es existiere eine endliche Menge $K \subset I$ und eine Funktion $y: I \to \mathbb{R}$ mit

$$(7.10)\quad \eta_i(f) + \sum_{j \notin K} p_{ij}(f)y(j) \leq y(i) \qquad (i \in I,\ f \in F),$$

$$(7.11)\quad f \to \sum_{j \notin K} p_{ij}(f)y(j) \quad \text{ist stetig} \qquad (i \in I),$$

$$(7.12)\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(n)}(f)y(j) = 0 \qquad (i \in K,\ f \in F).$$

Dann sind die Aussagen (6.19) - (6.25) in Satz 6.18 erfüllt. Es gilt

$$y(i) \geq u^*(i) := \sup_{f \in F} \mu_{iK}(f) \qquad (i \in I),$$

und u^* erfüllt ebenfalls (7.10) - (7.12).

Beweis:

Aus (7.10) folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$y(i) \geq \eta_i(f) + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(m)}(f)\eta_j(f) + \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(n)}(f)y(j).$$

Nach (2.19) gilt daher $y(i) \geq \mu_{iK}(f) \geq \eta_i(f)$ und

$$\begin{aligned} y(i) \geq y_n(i,f) &:= \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(n)}(f)y(j) \\ &\geq \sum_{j \notin K} {}_K p_{ij}^{(n)}(f) \sum_{h \notin K} p_{jh}(f)y(h) \qquad (7.10) \\ &= \sum_{h \notin K} {}_K p_{ih}^{(n+1)}(f)y(h) = y_{n+1}(i,f) \qquad (A.5). \end{aligned}$$

Mit Korollar A.2, Lemma A.13 (Stetigkeit von ${}_K p_{ij}^{(n)}(.)$) und (7.11) impliziert das die Stetigkeit von $y_n(i,.)$ $(n \in \mathbb{N})$. Wegen $y(i) \geq \eta_i(f)$ und Korollar A.2 folgt daraus die erste Aussage in

(6.23). Nach dem Satz von Dini (Satz A.4) folgt aus der Stetigkeit von $y_n(i,.)$ und aus $y_{n+1} \leq y_n$, daß die Konvergenz in (7.12) gleichmäßig auf F ist. Das impliziert die zweite Aussage in (6.23). Mit Satz 6.18 ist also die erste Behauptung des Satzes bewiesen. (Beachte: $f^*(i,K)(f) = 1$ folgt aus $\mu_{iK}(f) \leq y(i) < \infty$ $(i \in I,\ f \in F)$.)

Oben wurde bereits gezeigt, daß $y(i) \geq u^*(i)$. Daraus folgt (7.12) und mit Korollar A.2 auch (7.11) für u^* anstelle von y. Daß u^* auch (7.10) erfüllt, folgt aus der Optimalitätsgleichung für ein geeignetes Modell der dynamischen Optimierung; siehe dazu Federgruen et al. (79), Theorem 3.◇

Für die Aussagen in Satz 6.29 läßt sich eine hinreichende Bedingung angeben, die häufig in Warteschlangenmodellen nachgeprüft werden kann. Zu ihrer Formulierung sei angenommen, daß $I = \mathbb{N}$ ist. Die in Satz 7.13 auftretende Strategie $\bar{f}$ kann interpretiert werden als die "langsamste" Strategie, für die also die mittlere Rückkehrzeit von Zustand 1 nach 1 am größten ist. Satz 7.13 wird ohne die Generalannahme bewiesen; ein Teil von ihr gehört zur Aussage des Satzes.

Satz 7.13 (vgl. Schäl (77b), Lemma 2)

Sei $\nu(.)$ unterhalb stetig und $\bar{f} \in F$ eine Strategie, für die gilt

(7.14) $P_i^{\bar{f}}\{Y_1 \leq k\} \leq P_i^f\{Y_1 \leq k\}$ $\quad (i \in I,\ k \in I,\ f \in F)$

(d.h. Y_1 ist unter $P_i^{\bar{f}}$ stochastisch größer als unter P_i^f),

(7.15) $i \to P_i^{\bar{f}}\{Y_1 \leq k\}$ ist nicht-steigend $\quad (k \in I)$,

(7.16) $\nu(\bar{f}) < \infty$, und für $\bar{f}$ ist die EMK nicht-dissipativ.

Dann ist die EMK für alle $f \in F$ nicht-dissipativ, es existiert eine endliche Menge K mit $f^*(i,K)(f) = 1$ $(f \in F,\ i \in I)$, und $\pi_{ij}(.)$ ist stetig $(i,j \in I)$.

Beweis:

a) $P_i^{\bar{f}}\{Y_n \leq k\}$ ist nicht-steigend in i $\quad (n \in \mathbb{N},\ k \in I)$

Denn für $n = 1$ ist das (7.15), und per Induktion ist auch $P_i^{\overline{f}}\{Y_{n+1} \le k\} = \sum_j p_{ij}(\overline{f}) P_j^{\overline{f}}\{Y_n \le k\}$ nicht-steigend in i. Das gilt, weil aus (7.15) folgt, daß $\sum_j p_{ij}(\overline{f})h(j)$ nichtsteigend in i ist für alle nicht-steigenden Funktionen $h(.) \ge 0$.

b) $\quad P_i^{\overline{f}}\{Y_n \le k\} \le P_i^f\{Y_n \le k\} \qquad (n \in \mathbb{N},\ i,k \in I,\ f \in F).$

Das folgt per Induktion aus (7.14):

$$\begin{aligned} P_i^f\{Y_{n+1} \le k\} &= \sum_j p_{ij}(f) P_j^f\{Y_n \le k\} \\ &\ge \sum_j p_{ij}(f) P_j^{\overline{f}}\{Y_n \le k\} \qquad \text{(Ind.-vor.)} \\ &\ge \sum_j p_{ij}(\overline{f}) P_j^{\overline{f}}\{Y_n \le k\} \qquad \text{(7.14) und a)} \\ &= P_i^{\overline{f}}\{Y_{n+1} \le k\}. \end{aligned}$$

c) $\quad \sum_{j=1}^{k} \pi_{ij}(f) \ge \sum_{j=1}^{k} \pi_{ij}(\overline{f}) \qquad (i \in I,\ k \in I,\ f \in F)$

Das folgt direkt aus b) mit $\pi_{ij}(f) = \lim n^{-1} \sum_{m=1}^{n} P_i^f\{Y_m = k\}$.

d) Mit $k \to \infty$ folgt aus c) und (7.16) $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_{ij}(f) = 1$, also die erste Behauptung. Weiter impliziert c) die Straffheit von $\{j \to \pi_{ij}(f) \mid f \in F,\ i \in I\}$, denn wegen $\nu(\overline{f}) < \infty$ existiert eine endliche Menge L mit

$$\sum_{h \in L} f_{ih}^*(\overline{f}) = 1\ ,\ \pi_{ij}(\overline{f}) = \sum_{h \in L} f_{ih}^*(\overline{f}) \pi_{hj}(\overline{f}) \qquad (i,j \in I).$$

Mit Lemma 6.9 folgt daraus die zweite Behauptung und die Straffheit von $\{j \to \pi_{ij}(f) \mid f \in F\}$ für $i \in K$. Satz 6.29 liefert dann die dritte Behauptung.◇

Kapitel III

OPTIMIERUNG IN EINEM SEMIREGENERATIVEN ENTSCHEIDUNGSMODELL

§8 Das Entscheidungsmodell

In den beiden vorigen Paragraphen wurde die Abhängigkeit der Durchschnittskosten von Strategien f aus einer Menge F untersucht. Für jedes $f \in F$ war der zugrundeliegende Prozeß semiregenerativ. Wir formulieren jetzt ein Modell, in dem die Klasse der zugelassenen Strategien größer ist, sodaß die semiregenerative Eigenschaft der Prozesse verlorengeht. Die Verallgemeinerung gegenüber dem bisherigen Modell besteht darin, daß die Entscheidungen zu den Zeitpunkten S_n von der gesamten Vergangenheit des Prozesses abhängen dürfen. Das ist auch gegenüber dem Standard-Modell der Dynamischen Optimierung (siehe etwa Hinderer (70), Schäl (75)) eine Verallgemeinerung, da hier die Entscheidungen auch von dem Verhalten des (Z_t)-Prozesses und von den Übergangszeiten abhängig sein dürfen. Am Ende des Paragraphen wird gezeigt, wie sich das Modell von Schäl (75) und unser Modell aufeinander beziehen lassen.

Ausgangsdaten

Wir nehmen an, daß ein Entscheidungsprozeß gesteuert werden soll, der sich aus zwei Teilen zusammensetzt: Ein Sprungprozeß, der zu Zeitpunkten S_n - den Entscheidungszeitpunkten - in Zustände Y_n aus einem abzählbaren Zustandsraum springt, und ein Hilfsprozeß (Z_t). Zu jedem Entscheidungszeitpunkt S_n muß eine Aktion Δ_n aus einer Menge $A(Y_n)$ von zulässigen Aktionen ergriffen werden. Der nächste Zustand, Y_{n+1}, die Zeitspanne bis zum nächsten Entscheidungspunkt, $S_{n+1} - S_n$, und das Verhalten von Z_t in $[S_n, S_{n+1})$ werden dann durch ein W-Maß beschrieben, das nur von Y_n und Δ_n, nicht aber von der gesamten Vergangenheit bis zur Zeit S_n abhängt. Die Kosten setzen sich wie in den vorigen Paragraphen zusammen aus einer Kostenrate $c(Z_t)$ und aus Sprungkosten $d(Y_n, \Delta_n, Y_{n+1})$, die jetzt auch von den ergriffenen Aktionen Δ_n abhängen dürfen. Die Menge der zulässigen Strategien besteht aus Folgen $R = (R_0, R_1, \ldots)$, wobei R_n in Abhängigkeit von der Vergangenheit eine W-Verteilung über $A(Y_n)$ angibt, gemäß der Δ_n bestimmt wird.

Gegeben sind also :

- $(\tilde{\Omega},\tilde{A})$ ein Meßraum;
- $\tilde{S}\colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ eine Zufallsvariable;
- $\tilde{Y}\colon \tilde{\Omega} \to I$ eine Zufallsvariable mit Werten in dem abzählbaren Zustandsraum I;
- $\tilde{Z}_t\colon \tilde{\Omega} \to \mathcal{Z}$ ein stochastischer Prozeß mit rechtsseitig stetigen Pfaden in dem metrischen Raum $\mathcal{Z}$, definiert für $t \in [0,\tilde{S})$;
- A(i) eine Menge von zulässigen Aktionen bei Zustand $i \in I$, eine meßbare Teilmenge eines Standard-Borel-Raumes $(A,\mathcal{F})$;
- $\tilde{P}_{(i,a)}$ ein W-Maß auf $(\tilde{\Omega},\tilde{A})$ für $i \in I$, $a \in A(i)$, sodaß $a \to \tilde{P}_{(i,a)}(\tilde{A})$ meßbar ist $(\tilde{A} \in \tilde{A},\ i \in I)$;
- $c\colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine meßbare Abbildung;
- $d\colon I \times A \times I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine meßbare Abbildung.

Das Modell

Wir beweisen im nächsten Paragraphen, daß sich aus den gegebenen Daten ein Tupel $((\Omega,A),\mathcal{Z},I,(A,\mathcal{F}),(A(i))_{i\in I},(Z_t)_{t\geq 0},(S_n,Y_n,\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}_0},$ $c,d,\Pi,F,(P_i^R)_{i\in I,R\in\Pi})$ konstruieren läßt mit der folgenden Bedeutung:

a) (Ω,A) Meßraum;

b) $\mathcal{Z}$ metrischer Raum. Die Borel-σ-Algebra wird mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet;

c) I abzählbare Menge: "Zustandsraum";

d) $(A,\mathcal{F})$ Standard-Borel-Raum: "Aktionenraum";

e) A(i) meßbare Teilmenge von A: "Menge der zulässigen Aktionen" $(i \in I)$;

f) $Z_t\colon \Omega \to \mathcal{Z}$ stochastischer Prozeß mit rechtsseitig stetigen Pfaden;

g) $S_0 \leq 0 < S_1 < S_2 < \ldots$ reelle Zufallsvariablen auf Ω: "Folge der Entscheidungszeitpunkte";

h) $Y_n\colon \Omega \to I$ Zufallsvariablen $(n \in \mathbb{N}_0)$: "Folge der Zustände";

i) $\Delta_n: \Omega \to A$ Zufallsvariablen ($n \in \mathbb{N}_o$): "Folge der Aktionen";

j) $c: \quad \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ meßbare Funktion: "Kostenrate";

k) $d: I \times A \times I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ meßbare Funktion: "Sprungkosten".

(8.1) Die entsprechenden Bezeichnungen und Konventionen aus dem ersten Paragraphen werden übernommen. Speziell ist $X_t = (Z_t, U_t, Y_{n(t)}, \Delta_{n(t)})$, $A = \sigma(X_t, t \geq 0)$ und $\sigma_n = \sigma(S_o, Y_o, \Delta_o, \ldots, S_n, Y_n, \Delta_n)$.

Wir benötigen die folgenden Bezeichnungen: Für eine (X_t)-Stoppzeit T sei A_T die σ-Algebra aller Mengen $A \in A$, für die gilt: $A \cap \{T \leq t\} \in A_t$ $(t \geq 0)$, d.h. A_T ist die σ-Algebra der Ereignisse bis zur Zeit T. Definiere für $t > 0$:

$$\overline{X}_t := (Z_{t-}, U_t, Y_{n(t)}, \Delta_{n(t)}),$$
$$\overline{\overline{X}}_t := (Z_{t-}, U_t, Y_{n(t)}, \Delta_{n(t-)}),$$
$$\overline{X}_o := (U_o, Y_o, \Delta_o),$$
$$\overline{\overline{X}}_o := (U_o, Y_o).$$

Es seien $\overline{A}_{S_n}$ und $\overline{\overline{A}}_{S_n} =: \mathcal{H}_n$ die zugehörigen σ-Algebren der Ereignisse bis zum n-ten Entscheidungszeitpunkt. Entsprechend sei $\overline{A}_{S_o} := \sigma(U_o, Y_o, \Delta_o) = \sigma_o$ und $\mathcal{H}_o := \sigma(S_o, Y_o)$. Die σ-Algebren $\overline{A}_{S_n}$ und $\mathcal{H}_n$ unterscheiden sich von A_{S_n} nur dadurch, daß Z_{S_n} bzw. Z_{S_n} und Δ_n nicht berücksichtigt sind. Es gilt $\sigma_n \subset \overline{A}_{S_n}$ und $\sigma(S_o, Y_o, \Delta_o, \ldots, S_n, Y_n) \subset \mathcal{H}_n$ (Lemma 9.6 und Lemma 9.4). Offenbar ist $\mathcal{H}_n$ die σ-Algebra, bzgl. der die n-te Entscheidung meßbar sein muß. Das "$\mathcal{H}$" steht für "history".

l) Π Menge aller "Strategien" $R = (R_o, R_1, \ldots)$. Dabei ist R_n eine $\mathcal{H}_n$-meßbare Abbildung von Ω in die Menge der W-Maße auf A, sodaß gilt: $R_n(A(i)|.) = 1$ auf $\{Y_n = i\}$;

m) $F := \{R \in \Pi \mid \exists f: I \to A \;\; R_n(\{f(i)\}|.) = 1 \text{ auf } \{Y_n = i\}$ $(n \in \mathbb{N}_o, i \in I)\}$: "Menge der stationären Strategien". Man kann F identifizieren mit $\underset{i \in I}{X} A(i)$. Das zu f gehörige R wird mit f bezeichnet;

n) P_i^R ein W-Maß auf (Ω,A) $(i \in I, R \in \Pi)$. Es gilt

(8.2) $P_i^R\{S_o = 0,\ Y_o = i\} = 1$;

(8.3) $P_i^R\{\Delta_n \in G | \mathcal{K}_n\} = R_n(G|.)$ $[P_i^R]$ $(G \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}_o)$;

(8.4) $P_i^R\{Z_{S_n+t_k} \in C_k,\ t_k < S_{n+1} - S_n\ (1 \le k \le m),\ S_{n+1} - S_n \le t,$

$Y_{n+1} = j | \bar{A}_{S_n}\}$

$= \tilde{P}_{(Y_n,\Delta_n)}\{\tilde{Z}_{t_k} \in C_k,\ t_k < \tilde{S}\ (1 \le k \le m),\ \tilde{S} \le t,\ \tilde{Y} = j\}$

$= P_{Y_n}^{\Delta_n}\{Z_{t_k} \in C_k, t_k < S_1\ (1 \le k \le m), S_1 \le t,\ Y_1 = j\}$ $[P_i^R]$

$(n \in \mathbb{N}_o, m \in \mathbb{N}, C_k \in \mathcal{L},\ t_k \ge 0\ (1 \le k \le m),\ t \ge 0,\ j \in I)$;

(8.5) für $R = f \in F$ ist $((\Omega,A), \vartheta, I, (Z_t), (S_n,Y_n), (P_i^f))$ ein semiregenerativer Prozeß.

Der Ausdruck $P_{Y_n}^{\Delta_n}\{...\}$ in (8.4) ist bislang undefiniert. In naheliegender Weise soll gelten: $P_i^a\{...\} := P_i^R\{...\}$, falls $R_o(\{a\}|Y_o = i) = 1$. Diese Definition ist nach dem ersten Teil von (8.4) (für $n = 0$) für die angegebenen Mengen sinnvoll. Entsprechend schreiben wir gelegentlich für $p_{ij}(f)$, $\eta_i(f)$,...: $p_{ij}(a)$, $\eta_i(a)$...

Bemerkung 8.6

Die Beziehungen (8.2) - (8.4) drücken aus, daß das W-Maß P_i^R das Verhalten der Prozesse beschreibt, wenn im Punkt $Y_o = i$ und zur Zeit $S_o = 0$ gestartet wird. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind dabei gleich den vorgegebenen R_n bzw. durch die $\tilde{P}$ bestimmt.

Der Beweis unserer Konstruktion im folgenden Paragraphen erfordert, daß in (8.4) durch $\bar{A}_{S_n}$ und nicht nur durch σ_n bedingt wird. Ist Z_{S_n} $\bar{A}_{S_n}$-meßbar, so läßt sich damit die (8.5) verschärfende Aussage zeigen, daß (S_n,Y_n,Z_t) unter den P_i^f einen "Markoffschen Erneuerungsprozeß mit Hilfspfaden im strengen Sinne" nach der Definition von Schäl (70) bzw. einen semiregenerativen Prozeß nach der Definition von Cinlar (75) bilden.◇

Bemerkung 8.7.

Die Ergebnisse der vorigen Paragraphen bleiben anwendbar für die stationären Strategien $f \in F$, auch wenn dort die Sprungkosten nicht explizit von den Aktionen abhängen. Zu jedem $f \in F$ existiert nämlich eine Funktion $d^f: I \times I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $P_i^f\{d^f(Y_n,Y_{n+1}) = d(Y_n,\Delta_n,Y_{n+1})\} = 1$ $(i \in I, n \in \mathbb{N}_o)$. (Setze $d^f(i,j) = d(i,f(i),j)$. Auch die Kostenrate c kann von den Aktionen abhängen. Dazu braucht man nur $\Delta_{n(t)}$ als eine Komponente von Z_t zu wählen. Das ist O.B.d.A. immer möglich, vgl. Bemerkung 1.8.◇

Diskontierte Kosten

Die erwarteten diskontierten Kosten, bei Start in $i \in I$ und Verwendung von Strategie $R \in \Pi$, werden definiert durch $(\alpha > 0)$

$$V_{i,\alpha}(R) := E_i^R v_\alpha ,$$

vgl. die analoge Definition in §4. Entsprechend definieren wir die durchschnittlichen erwarteten Kosten

$$\overline{\Phi}_i(R) := \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} E_i^R K(t) ,$$

$$\underline{\Phi}_i(R) := \underline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} E_i^R K(t) .$$

Hier ist E_i^R der zu P_i^R gehörige Erwartungswertoperator.
Eine Strategie $R^* \in \Pi$ heißt α-optimal für $i \in I$, wenn $V_{i,\alpha}(R^*) = \inf_R V_{i,\alpha}(R) =: V^*_{i,\alpha}$. Eine Strategie R^* heißt durchschnittsoptimal für $i \in I$, wenn $\overline{\Phi}_i(R^*) = \inf_R \overline{\Phi}_i(R) =: \overline{\Phi}^*_i$.

Neben $\overline{\Phi}_i(R)$ und $\underline{\Phi}_i(R)$ benötigen wir noch die Größen

$$\overline{\chi}_i(R) := \overline{\lim_{\alpha\to 0}}\, \alpha\, V_{i,\alpha}(R) ,$$

$$\underline{\chi}_i(R) := \underline{\lim_{\alpha\to 0}}\, \alpha\, V_{i,\alpha}(R) .$$

Damit alle auftretenden Erwartungswerte wohldefiniert sind, machen wir die folgenden generellen Annahmen. Die Generalannahme aus §2 listen wir ebenfalls noch einmal auf.

Annahme B

$\| c^- \| < \infty$ und $\| d^- \| < \infty$, d.h. c und d sind nach unten beschränkt.

Annahme $\tilde{R}$

Für alle $f \in F$ ist die EMK nicht-dissipativ, und es gilt $D_+(f) \subset \tilde{D}_+($

Annahme Ü

$$\eta_i(a) < \infty \qquad (i \in I,\ a \in A(i)) \text{ und}$$

$$(8.8) \quad \exists \alpha_o > 0,\ \delta > 0 \quad \forall i \in I,\ a \in A(i) \quad E_i^a e^{-\alpha_o S_1} \leq 1 - \delta\alpha_o .$$

Hier steht "B" für Beschränktheit, "Ü" für Übergangszeiten und "R" für Rekurrenz. In §10 wird die Annahme $\tilde{R}$ noch verschärft.

Die folgenden Sätze werden im nächsten Paragraphen bewiesen.

Satz 8.9.

Es gilt

$$(8.10) \quad \exists M < \infty \quad \forall i \in I,\ R \in \Pi,\ \alpha \in (0,\alpha_o] \quad \alpha E_i^R \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} \leq M ,$$

$$(8.11) \quad \exists t_o < \infty,\ M < \infty \quad \forall i \in I,\ R \in \Pi,\ t \geq t_o \quad E_i^R\, n(t)/t \leq M ,$$

$$(8.12) \quad \eta_i(a) \geq \delta \qquad (i \in I,\ a \in A(i)). \diamond$$

Wegen Annahme B folgt aus (8.10) und (8.11) die Wohldefiniertheit von $V_{i,\alpha}(R)$ und $\overline{\Phi}_i(R)$, $\underline{\Phi}_i(R)$ (vgl. die entsprechenden Überlegungen in §4).

Satz 8.13

$$V_{i,\alpha}(R) = E_i^R \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha S_n} \rho_\alpha(Y_n, \Delta_n)$$

$$= E_i^R \left[\rho_\alpha(Y_o, \Delta_o) + e^{-\alpha S_1} V_{Y_1,\alpha}(R_i(S_1)) \right]$$

für $i \in I$, $\alpha > 0$, $R \in \Pi$. Dabei ist $R_i(t)$ eine Strategie aus Π, bei der die einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten $R^t_{i,n}$ zusätzlich von dem Parameter $t > 0$ abhängen. (Für die genaue Definition siehe Beweis in §9.) $\diamond$

Satz 8.14.

$$\forall \alpha > 0,\ \varepsilon > 0\ \ \exists f \in F\ \ \forall i \in I\ \ V_{i,\alpha}(f) - \varepsilon \leq V^*_{i,\alpha} \qquad \diamond$$

Bemerkung 8.15.

Satz 8.14 sagt aus, daß bzgl. des diskontierten Kriteriums ε-optimale stationäre Strategien existieren. Für die Existenz von durchschnittsoptimalen Politiken ist das eine entscheidende Eigenschaft der Menge F, siehe Beweis von Satz 10.20. Daraus folgt, daß F durch eine Teilmenge der stationären Strategien ersetzt werden darf, solange nur die Aussage von Satz 8.14 gilt. In §10 werden wir deshalb annehmen, daß F eine Teilmenge der stationären Strategien ist. Das hat zur Folge, daß a) die Annahmen aus §10 leichter überprüft werden können und daß b) die Ergebnisse stärker sind (Existenz einer durchschnittsoptimalen Politik in F). Beides kann in den Anwendungen vorteilhaft ausgenutzt werden, siehe die Beispiele in §13 und §14. $\diamond$

Beziehung zum Modell von Schäl (75)

Beschränkt man sich auf Strategien, die nur von vergangenen Zuständen und Aktionen abhängen, so entspricht das in diesem Paragraphen konstruierte Modell dem von Schäl (75) (mit abzählbarem Zustandsraum). Um das zu zeigen, werden einige Bezeichnungen eingeführt und ein Lemma bewiesen.

$$\chi_n := (Y_0, \Delta_0, \ldots, Y_{n-1}, \Delta_{n-1}, Y_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\Pi' := \{R \in \Pi \mid R_n \text{ ist } \chi_n\text{-meßbar} \quad (n \in \mathbb{N}_0)\}$$

$$F^a_{ij}(t) := \begin{cases} Q^a_{ij}(t)/p_{ij}(a) & p_{ij}(a) > 0 \\ [t \geq 1] & p_{ij}(a) = 0 \end{cases} \qquad (i,j \in I,\ a \in A(i))$$

$$\beta_\alpha(i,a,j) := \int_0^\infty F^a_{ij}(dt) e^{-\alpha t} \qquad (i,j \in I,\ a \in A(i),\ \alpha > 0)$$

Lemma 8.16 (vgl. Pyke (61a), (3.6))

Für $R \in \Pi'$, $i \in I$, $n,m \in \mathbb{N}_0$ $(m > n)$, $t_0, \ldots, t_n \geq 0$ gilt

$$(8.17)\quad P^R_i\{S_1 - S_0 \leq t_0, \ldots, S_{n+1} - S_n \leq t_n \mid \chi_m\} = F^{\Delta_0}_{Y_0,Y_1}(t_0) \cdot \ldots \cdot F^{\Delta_n}_{Y_n,Y_{n+1}}(t_n) \quad [P^R_i]$$

Beweis:

O.B.d.A. ist m = n+1. Zunächst gilt

$$P_i^R\{S_1-S_o \le t_o,\dots,S_n-S_{n-1} \le t_{n-1}|\chi_n,\Delta_n\}$$
$$= P_i^R\{S_1-S_o \le t_o,\dots,S_n-S_{n-1} \le t_{n-1}|\chi_n\}\ [P_i^R]$$

Das zeigt man durch Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten unter Ausnutzung von $P_i^R\{\Delta_n \in G|S_o,Y_o,\dots,\Delta_{n-1},S_n,Y_n\} = P_i^R\{\Delta_n \in G|\chi_n\}\ [P_i^R]$ ($G \in \mathfrak{F}$). Nun ist die linke Seite von (8.17) (für m = n+1) nach einer Verallgemeinerung von Beispiel 3 nach Definition 54.2 in Bauer (74) gleich

$$\sum_j [Y_{n+1} = j]P_i^R\{S_1-S_o \le t_o,\dots,S_{n+1}-S_n \le t_n, Y_{n+1} = j|\chi_n,\Delta_n\}/p_{Y_n,j}(\Delta_n)$$
$$= P_i^R\{S_1-S_o \le t_o,\dots,S_n-S_{n-1} \le t_{n-1}|\chi_n,\Delta_n\} \cdot F^{\Delta_n}_{Y_n,Y_{n+1}}(t_n) \quad (8.4)$$
$$= P_i^R\{S_1-S_o \le t_o,\dots,S_n-S_{n-1} \le t_{n-1}|\chi_n\} \cdot F^{\Delta_n}_{Y_n,Y_{n+1}}(t_n)$$
$$= F^{\Delta_o}_{Y_o,Y_1}(t_o) \cdot \dots \cdot F^{\Delta_n}_{Y_n,Y_{n+1}}(t_n) \quad [P_i^R] \qquad \text{per Induktion.}\diamond$$

Satz 8.18.

$$V_{i,\alpha}(R) = E_i^R \sum_{n=0}^{\infty} \beta_\alpha(Y_o,\Delta_o,Y_1) \cdot \dots \cdot \beta_\alpha(Y_{n-1},\Delta_{n-1},Y_n) \cdot \rho_\alpha(Y_n,\Delta_n)$$

für alle $i \in I$, $\alpha > 0$, $R \in \Pi'$.

Beweis:

Nach Satz 8.13 und Lemma 8.16 ist

$$V_{i,\alpha}(R) = E_i^R \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha S_n} \rho_\alpha(Y_n,\Delta_n)$$
$$= E_i^R\Big[\sum_{n=0}^{\infty} E_i^R[e^{-\alpha(S_1-S_o)} \cdot \dots \cdot e^{-\alpha(S_n-S_{n-1})}|\chi_{n+1}] \cdot \rho_\alpha(Y_n,\Delta_n)\Big]$$
$$= E_i^R \sum_{n=0}^{\infty} \beta_\alpha(Y_o,\Delta_o,Y_1) \cdot \dots \cdot \beta_\alpha(Y_{n-1},\Delta_{n-1},Y_n) \cdot \rho_\alpha(Y_n,\Delta_n).\diamond$$

Diese Darstellung von $V_{i,\alpha}(R)$ entspricht der Definition des erwarteten diskontierten Gesamtgewinns in Schäl (75). Wegen

$$E_i^a \, e^{-\alpha S_1} = \sum_j p_{ij}(a)\beta_\alpha(i,a,j) \qquad (i \in I,\ a \in A(i), \alpha > 0)$$

wird unsere Annahme (8.8) impliziert von

$$\| \beta_\alpha \| < 1$$

(der "diskontierte Fall" in Schäl (75), S. 181).

§9 Beweise zu §8

In diesem Paragraphen zeigen wir, daß die Konstruktion von (Ω,A), (Z_t), (S_n,Y_n,Δ_n), Π und P_i^R mit den in §8 genannten Eigenschaften möglich ist. Anschließend beweisen wir die Sätze 8.9, 8.13 und 8.14.

Wir benötigen das folgende allgemeine Ergebnis.

Satz 9.1.

Sei (X_t) ein stochastischer Prozeß auf dem Meßraum (Ω,A), und sei $T: \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ eine (X_t)-Stoppzeit. Dann ist

$$A_T = \mathcal{G}_T := \sigma(X_{T\wedge t},\ t \geq 0).$$

Beweis:

Das ist Theorem 1.6 in Shiryayev (78), wenn Ω so viele Elemente enthält, daß gilt

$$(9.2) \qquad \forall t \geq 0,\ \omega \in \Omega \quad \exists \omega' \in \Omega \quad \forall s \geq 0 \quad X_s(\omega') = X_{s\wedge t}(\omega).$$

Wir zeigen, daß auf diese Voraussetzung verzichtet werden kann. Dazu erweitern wir ähnlich wie in Bemerkung 1.3 Ω um eine Menge Ω_1, sodaß (9.2) erfüllt ist. Sei $\Omega_1 := \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Omega_1$. Auf Ω seien $\overline{X}_t$ und $\overline{T}$ gleich X_t bzw. gleich T. Auf Ω_1 sei $\overline{X}_t$ definiert durch $\overline{X}_t(s,\omega) = X_{s\wedge t}(\omega)$; ferner sei $\overline{T} = \infty$ auf Ω_1. Dann ist $\overline{T}$ eine Stoppzeit für den Prozeß $(\overline{X}_t)$ auf $\overline{\Omega}$. Für $\overline{\Omega}$ und $(\overline{X}_t)$ ist nach Konstruktion (9.2) erfüllt. Es gilt also $\overline{A}_{\overline{T}} = \overline{\mathcal{G}}_{\overline{T}}$. Nun läßt sich leicht einsehen, daß gilt: $\overline{A} \cap \Omega = A$, $\overline{A}_t \cap \Omega = A_t$ $(t \geq 0)$ (vgl. Hinderer (72), Satz 13.3), daher auch $\overline{A}_{\overline{T}} \cap \Omega = A_T$. Ebenso hat man $\overline{\mathcal{G}}_{\overline{T}} \cap \Omega = \mathcal{G}_T$. Daraus folgt die Behauptung.◇

Definition von (Ω,A), (Z_t), (S_n,Y_n,Δ_n)

Setze jetzt $\hat{\Omega} = \{0\} \times I \times A \times \tilde{\Omega} \times (\mathbb{R}^+ \times I \times A \times \tilde{\Omega})^{\mathbb{N}}$. Die Projektionen von $\hat{\Omega}$ auf $\mathbb{R}^+$ (bzw. $\{0\}$), I, A und $\tilde{\Omega}$ seien mit S_n, Y_n, Δ_n und p_n bezeichnet $(n \in \mathbb{N}_0)$. Es sei $\Omega := \{\omega \in \hat{\Omega} \mid \tilde{S}(p_n(\omega)) = S_{n+1}(\omega) - S_n(\omega)$ $(n \in \mathbb{N}_0)\}$, und A sei die Spur-σ-Algebra von $\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\times} (\mathfrak{B}_+^1 \times \mathcal{P}(I) \times \mathcal{F} \times \tilde{A})$.

Definiere

$$n(t) := \sup\{n \in \mathbb{N}_o \mid S_n \leq t\}$$

$$U_t := t - S_{n(t)} \tag{9.3}$$

$$Z_t := \tilde{Z}_{U_t}(p_{n(t)})$$

mit den Konventionen für $t < 0$ oder $t \geq S_\infty$ wie früher (§1). Weil $U_t < \tilde{S} \circ p_{n(t)}$ auf Ω gilt, ist Z_t wohldefiniert. Wie in (8.1) lassen sich X_t, $\bar{X}_t$, $\bar{\bar{X}}_t$, $\bar{A}_{S_n}$ und $\mathcal{H}_n$ definieren.

Beziehungen zwischen σ-Algebren

Lemma 9.4.

$$\sigma(S_o, Y_o, \Delta_o, S_1, \ldots, \Delta_{n-1}, S_n, Y_n) \subset \mathcal{H}_n \qquad (n \in \mathbb{N}_o)$$

Beweis:

O.B.d.A. ist $n \in \mathbb{N}$. Sei $m \leq n$, $u \geq 0$, $i \in I$. Nach Lemma 1.5, Bemerkung 1.6 und Satz 9.1 ist

$$\{S_m > u\} = \{m > \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{2^p} [U_{k\cdot 2^{-p}\cdot u \wedge S_n} < 2^{-p}\cdot u]\} \in \mathcal{H}_n$$

$$\{Y_m = i\} = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{t\in\mathbb{Q}^+} \{S_m \leq t < S_m + \varepsilon, Y_{n(t\wedge S_n)} = i\} \in \mathcal{H}_n$$

und für $m < n$, $G \in \mathcal{F}$

$$\{\Delta_m \in G\} = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{t\in\mathbb{Q}^+} \{S_m \leq t < S_m + \varepsilon, \Delta_{n((t\wedge S_n)-)} \in G\} \in \mathcal{H}_n \,.\diamond$$

Lemma 9.5.

$$\mathcal{H}_n \subset \sigma(S_o, Y_o, \Delta_o, p_o, \ldots, \Delta_{n-1}, p_{n-1}, S_n, Y_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_o)$$

Beweis:

O.B.d.A. ist $n \in \mathbb{N}$. Es genügt, für $t > 0$, $C \in \mathcal{L}$, $u \geq 0$, $i \in I$ und $G \in \mathcal{F}$ zu zeigen, daß $\{\bar{\bar{X}}_{t\wedge S_n} \in C \times [0,u] \times \{i\} \times G\}$ ein Element der rechtsstehenden σ-Algebra ist (Satz 9.1). Diese Menge ist aber gleich $\bigcup_{m=0}^{n-1} \{S_m \leq t < S_{m+1}, t-S_m \leq u, Y_m = i, \Delta_{n(t-)} \in G, \tilde{Z}_{(t-S_m)-}(p_m) \in C\}$

$$\cup \{S_n \leq t, Y_n = i, \Delta_{n-1} \in G, \tilde{Z}_{(S_n - S_{n-1})}(p_{n-1}) \in C\}. \diamond$$

Analog zu diesen beiden Lemmata beweist man

Lemma 9.6.

$$\sigma_n \subset \overline{A}_{S_n} \qquad (n \in \mathbb{N}_o) \qquad \diamond$$

Lemma 9.7.

$$\overline{A}_{S_n} \subset \sigma(S_o, Y_o, \Delta_o, p_o, \ldots, p_{n-1}, S_n, Y_n, \Delta_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_o) \quad \diamond$$

Bemerkung 9.8.

Als Korollar hat man für den Prozeß $(S_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}_o}$:

$$\sigma(S_o, Y_o, \ldots, S_n, Y_n) = (\sigma(U_t, Y_{n(t)}; t \geq 0))_{S_n} \qquad (n \in \mathbb{N}) \; . \diamond$$

Definition von Π und P_i^R

Die Menge der Strategien, Π, wird jetzt definiert als die Menge aller Folgen $R = (R_o, R_1, \ldots)$, wobei R_n ein ÜW-Maß von $(\Omega, \mathcal{H}_n)$ nach $(A, \mathcal{F})$ ist, sodaß gilt $R_n(A(i)|.) = 1$ auf $\{Y_n = i\}$ $(n \in \mathbb{N}_o, i \in I)$. Wir nehmen an, daß die R_n auch auf $\hat{\Omega}$ definiert sind, und bestimmen die W-Maße P_i^R $(i \in I, R \in \Pi)$ nach einem Satz von Ionescu Tulcea in der Weise, daß gilt

$$(9.9) \qquad P_i^R\{S_o = 0,\ Y_o = i\} = 1 \; ,$$

$$(9.10) \qquad P_i^R\{\Delta_n \in G | S_o, Y_o, \ldots, \Delta_{n-1}, p_{n-1}, S_n, Y_n\} = R_n(G|.) \quad [P_i^R],$$

$$(9.11) \qquad P_i^R\{p_n \in \tilde{A}, S_{n+1} - S_n \leq t,\ Y_{n+1} = j | S_o, Y_o, \Delta_o, p_o, \ldots, S_n, Y_n, \Delta_n\}$$
$$= \tilde{P}_{(Y_n, \Delta_n)}(\tilde{A} \cap \{\tilde{S} \leq t, \tilde{Y} = j\}) \quad [P_i^R]$$

für alle $n \in \mathbb{N}_o, G \in \mathcal{F}$, $\tilde{A} \in \mathcal{A}$, $t \geq 0$, $j \in I$. Bei (9.10) kommt Lemma 9.5 zur Anwendung.

Wegen $P_i^R\{\tilde{S} \circ p_n = S_{n+1} - S_n \ (n \in \mathbb{N}_o)\} = 1$ ist P_i^R auch auf Ω ein W-Maß. Wie in Bemerkung 1.3 läßt sich Ω um eine Menge erweitern (die Nullmenge für alle P_i^R ist), sodaß die Beziehungen (9.3), die Lemmata 9.4 bis 9.7 und die Beziehungen (9.9) - (9.11) weiterhin

gelten und die Bedingung (SR2) aus §1 erfüllt ist. Auf Ω ist $S_o \leq 0 < S_1 < S_2 < \dots$.

Beweis von (8.2) - (8.5)

Mit Lemma 9.5 und Lemma 9.7 ist leicht zu sehen, daß (8.2) - (8.4) aus (9.9) - (9.11) folgen. Der Beweis von (8.5) gestaltet sich etwas schwieriger, obwohl die Behauptung unmittelbar einsichtig ist. Er verläuft über eine Reihe von Zwischenergebnissen. Sei dazu $f \in F$ fest.

Lemma 9.12.

$$P_i^f\{X_{S_n+t_k} \in B_k, t_k < S_{n+1}-S_n \ (1 \leq k \leq m), S_{n+1}-S_n \leq t, Y_{n+1} = j \mid \sigma_n, p_o \dots, p_{n-1}\}$$
$$= P_{Y_n}^f\{X_{t_k} \in B_k, t_k < S_1 \ (1 \leq k \leq m), S_1 \leq t, Y_{n+1} = j\} \quad [P_i^f]$$

$(i \in I,\ n \in \mathbb{N}_o,\ m \in \mathbb{N},\ B_k \in \mathfrak{B},\ t_k \geq 0 (1 \leq k \leq m), t \geq 0, j \in I)$.

Der Beweis folgt leicht aus (9.11). ◇

Lemma 9.13.

$$E_i^f[X_{S_n+t_k} \in B_k, S_{n+k} \leq S_n + t_k < S_{n+k+1} \ (0 \leq k \leq m),$$
$$h(S_{n+1}-S_n, Y_{n+1}, \dots, S_{n+m+1}-S_{n+m}, Y_{n+m+1}) \mid \sigma_n, p_o, \dots, p_{n-1}]$$
$$= E_{Y_n}^f[X_{t_k} \in B_k, S_k \leq t_k < S_{k+1} \ (0 \leq k \leq m),$$
$$h(S_1 - S_o, Y_1, \dots, S_{m+1} - S_m, Y_{m+1})] \quad [P_i^f]$$

$(i \in I, m,n \in \mathbb{N}_o, B_k \in \mathfrak{B}, t_k \geq 0 \ (0 \leq k \leq m), h: (\mathbb{R}^+ \times I)^{m+1} \to \mathbb{R}_+$ meßbar).

Beweis:

Induktion über m. Der Induktionsanfang m = 0 folgt mit dem Beweisprinzip für Integrale aus Lemma 9.12. Der Induktionsschluß von m-1 auf m geschieht unter erneuter Verwendung von Lemma 9.12, indem zunächst durch $\sigma_{n+m}, p_o, \dots, p_{n+m-1}$ bedingt wird. Hier geht ein, daß in Lemma 9.12 der bedingte Erwartungswert nicht nur bzgl. σ_n gebildet wird, vgl. Bemerkung 8.6. ◇

Lemma 9.14.

$$P_i^f\{X_{S_n+t_k} \in B_k, S_{n+\nu_k} \leq S_n + t_k < S_{n+\nu_k+1} \ (1 \leq k \leq m) \mid \sigma_n\}$$

$$= P_{Y_n}^f\{X_{t_k} \in B_k, S_{\nu_k} \leq t_k < S_{\nu_k+1}\} \quad [P_i^f]$$

$$(i \in I,\ n \in \mathbb{N}_o, m \in \mathbb{N}, B_k \in \mathfrak{B}, t_k \geq 0, \nu_k \in \mathbb{N}_o\ (1 \leq k \leq m))$$

Beweis:

Für $0 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_m$ folgt die Behauptung aus Lemma 9.13, indem man $h \equiv 1$ und einige der B_k's dort gleich $\mathfrak{X}$ setzt. Für beliebige ν_k's folgt sie durch Umnumerieren und evtl. Schnittbildung bei den B_k's. ◇

Die Bedingung (SR1) aus §1 folgt aus Lemma 9.14 durch Summation über die ν_k's. Damit ist (8.5) bewiesen und die Konstruktion unseres Modells abgeschlossen.

Beweis der Sätze 8.9, 8.13 und 8.14

Wir bringen jetzt die noch ausstehenden Beweise zu §8. Dazu seien die Bedingungen B,$\tilde{R}$ und Ü erfüllt.

Beweis von Satz 8.9

Es ist, zunächst für $\alpha = \alpha_o$,

$$1 - \alpha\int_0^\infty dt\, e^{-\alpha t}(1 - H_i^a(t)) = \alpha \int_0^\infty dt\, e^{-\alpha t} H_i^a(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} H_i^a(dt) = E_i^a e^{-\alpha S_1} \leq 1 - \alpha\delta. \tag{9.15}$$

Daraus folgt $\int_0^\infty dt\, e^{-\alpha t}(1 - H_i^a(t)) \geq \delta$ für $\alpha = \alpha_o$. Das gilt dann sogar für alle $\alpha \in (0,\alpha_o]$, also auch (9.15) für alle $\alpha \in (0,\alpha_o]$. Daher ist für diese α

$$E_i^R \sum_{n=0}^\infty e^{-\alpha S_{n+1}} = \sum_{n=0}^\infty E_i^R[e^{-\alpha(S_1-S_o)} \cdot \ldots \cdot e^{-\alpha(S_{n+1}-S_n)}]$$

$$= \sum_{n=0}^\infty E_i^R[e^{-\alpha(S_1-S_o)} \cdot \ldots \cdot e^{-\alpha(S_n-S_{n-1})} \cdot E_{Y_n} e^{-\alpha S_1}] \quad (8.$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} E_i^R[e^{-\alpha(S_1-S_0)} \cdot \ldots \cdot e^{-\alpha(S_n-S_{n-1})}] \cdot (1 - \alpha\delta)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \alpha\delta)^{n+1} \qquad \text{(Induktion)}$$

$$\leq 1/(\alpha\delta).$$

Daraus folgt (8.10).
Die Aussage (8.11) folgt aus (8.10) mit Lemma 5.16:

$$e^{-1}\sup\{E_i^R n(t)/t \mid i \in I, R \in \Pi, t \geq 1/\alpha_o\}$$
$$\leq \sup\{\alpha e^{-\alpha t} E_i^R n(t) \mid i \in I, R \in \Pi, \alpha \leq \alpha_o, t \geq 1/\alpha_o\}$$
$$= \sup\{\alpha^2 \int_t^{\infty} du\, e^{-\alpha u} E_i^R n(t) \mid i \in I, R \in \Pi, \alpha \leq \alpha_o, t \geq 1/\alpha_o\}$$
$$\leq \sup\{\alpha^2 \int_0^{\infty} du\, e^{-\alpha u} E_i^R n(u) \mid i \in I, R \in \Pi, \alpha \leq \alpha_o\}$$
$$= \sup\{\alpha E_i^R \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} \mid i \in I, R \in \Pi, \alpha \leq \alpha_o\}$$
$$< \infty.$$

Aus (9.15) folgt schließlich $\eta_i(a) = \int_0^{\infty} dt(1 - H_i^a(t)) \geq \delta$. ◇

Beweis von Satz 8.13.

Aus (8.4) folgt für alle $\mathcal{H}_1$-meßbaren Funktionen $h: \Omega \to \mathbb{R}_+$ und für $n \in \mathbb{N}_o$:

$$E_i^R[\theta_n h \mid \sigma_n] = E_{Y_n}^{\Delta_n} h \qquad [P_i^R].$$

Daher impliziert die Beziehung (4.19) die erste Behauptung:

$$(9.16) \quad V_{i,\alpha}(R) = E_i^R \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha S_n} \rho_\alpha(Y_n, \Delta_n).$$

Zum Beweis der zweiten benötigen wir das folgende Ergebnis, das eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes aus der dynamischen Programmierung darstellt. Sei dazu $\Pi_{sm} := \{R \in \Pi \mid R_n$ ist (S_n, Y_n)-meßbar$\}$. Dabei steht "sm" für "semi-Markoffsch".

Lemma 9.17

$\forall R \in \Pi,\ i \in I\ \ \exists R' \in \Pi_{sm}\ \ \forall \alpha > 0\ \ V_{i,\alpha}(R) = V_{i,\alpha}(R')$.
Die Verteilung von $(S_o, Y_o, \Delta_o, S_1, Y_1)$ unter $P_i^{R'}$ ist gleich der unter P_i^R

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zu dem von Theorem 4.1 in Strauch (66), vgl. auch Hinderer (70), Theorem 18.1. Dabei wird benötigt, daß eine bedingte Verteilung von Δ_n bzgl. (S_n, Y_n) unter P_i^R existiert. Das gilt, weil A ein Standard-Borel-Raum ist, siehe z.B. Hinderer (70), Theorem 12.4. I.A. kann R_n nicht Y_n-meßbar gewählt werden, da die Summanden in (9.16) auch von S_n abhängen. Das unterscheidet unser Semi-Markoff-Modell von dem gewöhnlichen Modell der Dynamischen Programmierung. ◇

Mit Lemma 9.17 ist der zweite Teil von Satz 8.13 leicht zu beweisen. Schreibe $R_n' = h_n \circ (S_n, Y_n)$ mit einer Übergangswahrscheinlichkeit h_n von $\mathbb{R}^+ \times I$ nach A $(n \in \mathbb{N})$. (Bauer (74), Lemma 55.1. Aus (SR2) und (1.10) folgt, daß $S_n(\Omega)$ aus abzählbar vielen Intervallen zusammengesetzt ist; daher ist $S_n(\Omega) \times Y_n(\Omega)$ meßbar.) Definiere $R_i(t)$ durch $R_{i,n}^t := h_{n+1} \circ (t + S_n, Y_n)$. Dann ist leicht zu zeigen, daß gilt

$$V_{Y_1,\alpha}(R_i(S_1)) = e^{\alpha S_1} E_i^{R'}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} \rho_\alpha(Y_n, \Delta_n) \,\Big|\, S_1, Y_1\Big] \quad [P_i^{R'}] .$$

Mit Lemma 9.17 folgt daraus die Behauptung. ◇

Beweis von Satz 8.14

Der Beweis benutzt Standard-Argumente der Dynamischen Programmierung. Bekannte Ergebnisse lassen sich aber wohl nicht direkt anwenden, weil die hier betrachtete Menge der zulässigen Strategien größer ist.

Sei $\alpha > 0$. Für beliebiges $v: I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, das nach unten beschränkt ist, und für beliebiges $f \in F$ definiere $L_f v: I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$L_f v(i) := \rho_\alpha(i, f(i)) + E_i^f[e^{-\alpha S_1} v(Y_1)].$$

Setze

$$Uv := \inf_{f\in F} L_f v\colon I \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}\,.$$

Für alle $R \in \Pi$ ist nach Satz 8.13

$$\begin{aligned} V_{i,\alpha}(R) &\geq E_i^R[\rho_\alpha(Y_0,\Delta_0) + e^{-\alpha S_1} V^*_{Y_1,\alpha}] \\ &\geq UV^*_{\cdot,\alpha}(i). \end{aligned}$$

Daher gilt $V^*_{i,\alpha} \geq UV^*_{\cdot,\alpha}(i)$ $(i \in I)$. Sei $\varepsilon > 0$, $\eta := \varepsilon\alpha/M$ mit M wie in (8.10) und $f \in F$ so, daß

$$V^*_{i,\alpha} + \eta \geq L_f V^*_{\cdot,\alpha}(i) \qquad (i \in I).$$

Daraus folgt durch Iteration

$$V^*_{i,\alpha} + \varepsilon \geq V^*_{i,\alpha} + \eta E_i^f \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\alpha S_m} \geq L_f^{(n)} V^*_{\cdot,\alpha}(i) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

wobei $L_f^{(n)} = L_f \circ L_f^{(n-1)}$, $L_f^{(1)} = L_f$. Die Behauptung des Satzes folgt dann aus

$$L_f^{(n)} V^*_{\cdot,\alpha}(i) = L_f^{(n)} 0(i) + E_i^f[e^{-\alpha S_n} V^*_{Y_n,\alpha}].$$

Denn

$$L_f^{(n)} 0(i) = E_i^f \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\alpha S_m} \rho_\alpha(Y_m,\Delta_m) \to V_{i,\alpha}(f)$$

nach Satz 8.13 und

$$\varliminf_{n\to\infty} E_i^f[e^{-\alpha S_n} V^*_{Y_n,\alpha}] \geq 0\,,$$

weil $V^*_{\cdot,\alpha}$ nach unten beschränkt ist und $\lim E_i^f e^{-\alpha S_n} = 0$ wegen $E_i^f \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha S_m} < \infty$ nach Satz 8.9. ◇

Bemerkung 9.18.

Der Beweis zeigt, daß auch im Falle $d \geq 0$ die Voraussetzung Ü nicht ersatzlos gestrichen werden kann. Es würde allerdings ausreichen:

$$\sup\{E_i^f \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} | f \in F\} < \infty \qquad (i \in I, \alpha > 0).$$

Im Markoffschen Fall ist Ü natürlich immer erfüllt. ◇

§10 Existenz durchschnittsoptimaler Strategien

In diesem Paragraphen wird für das in §8 eingeführte Modell die Existenz einer stationären durchschnittsoptimalen Strategie bewiesen. Hier und in allen folgenden Paragraphen ist F eine Teilmenge der stationären Strategien. Wir beginnen mit einer Auflistung aller Bedingungen, deren Gültigkeit wir im folgenden voraussetzen. Die Annahmen (B) und (Ü) aus §8 führen wir noch einmal mit an; die Generalannahme aus §2 und $(\tilde{R})$ aus §8 sind implizit enthalten.

Die Annahmen

(B) Beschränktheitsannahme

$$\| c^- \| < \infty \quad \text{und} \quad \| d^- \| < \infty$$

(Ü) Annahme für die Übergangszeiten

$$\eta_i(f) < \infty \qquad (f \in F, i \in I)$$

$$\exists \alpha_o > 0,\ \delta > 0 \quad \forall f \in F,\ i \in I \quad E_i^f e^{-\alpha_o S_1} \leq 1 - \delta\alpha_o$$

(D) Existenz ε-optimaler Strategien für diskontierte Kosten

$$\forall \alpha > 0,\ \varepsilon > 0,\ i \in I \quad \exists f \in F \quad V_{i,\alpha}(f) - \varepsilon \leq V_{i,\alpha}^*$$

(K) Kompaktheitsannahme

F ist ein kompakter metrischer Raum

(S) Stetigkeitsannahmen

(10.1) $f \to p_{ij}(f)$ ist stetig $(i,j \in I)$

(10.2) $f \to \eta_i(f)$ ist stetig $(i \in I)$

(10.3) $f \to E_i^f[Y_1 = j, S_1] = \int_0^\infty dt(p_{ij}(f) - Q_{ij}^f(t))$
ist stetig $(i,j \in I)$.

Im Falle $d^- \neq 0$ gelte zusätzlich

(10.4) eine der beiden folgenden Bedingungen ist erfüllt:

—— $f \to E_i^f g(Y_1, S_1) = \sum_j \int_0^\infty Q_{ij}^f(dt)\, g(j,t)$ ist stetig für alle $i \in I$ und alle stetigen und beschränkten Funktionen $g: I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$;

—— $\int_0^\infty dt \sup_{f \in F} (p_{ij}(f) - Q_{ij}^f(t)) < \infty \quad (i,j \in I)$.

(10.5) $\exists \alpha_o > 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_o],\ i \in I \quad f \to \rho_\alpha(i,f)$ ist unterhalb stetig

(R) Rekurrenzannahme

$\forall f \in F \quad D_+(f) \subset \tilde{D}_+(f)$ und $\forall i \in I \setminus D_+(f)\ \exists K \subset D_+(f)$

K ist endlich, $f^*(i,K)\ (f) = 1$ und

$\lim_{t \to \infty} t^{-1} E_i^f K_{abs}\ (t \wedge T_K) = 0$

(Z) Zusammenhangsannahme

$f \to \mu_{ii}(f)$ ist stetig (als Funktion nach $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$) $(i \in I)$

Bemerkungen.

(10.6) Wenn die A(i) kompakte metrische Räume sind ($i \in I$) und wenn F eine abgeschlossene Teilmenge der stationären Strategien ist, dann ist Annahme (K) erfüllt. Ist F gleich der Menge aller stationären Strategien, so ist auch Annahme (D) erfüllt, siehe Satz 8.14.

(10.7) Gilt $Q_{ij}^f(t) = p_{ij}(f) \cdot H_i^f(t)$ $(i,j \in I,\ t \geq 0,\ f \in F)$, dann folgt (10.3) aus (10.1) und (10.2). Zu (10.4) siehe Bemerkung 10.14.

(10.8) Annahme (R) impliziert: $D(f) = D_+(f) = \tilde{D}_+(f) \neq \emptyset$, und die EMK ist nicht-dissipativ ($f \in F$) (vgl. Lemma 2.22). Sie verschärft also Annahme ($\tilde{R}$) und enthält einen Teil der Generalannahme aus §2. Deren zweiter Teil steht hier in Annahme (Ü).

(10.9) Äquivalente und hinreichende Bedingungen für Annahme (Z) wurden in §6 und §7 gegeben. Siehe auch die Diskussion in §12. ◇

Das folgende Lemma läßt sich auf einen bekannten Abelschen Satz zurückführen, siehe etwa Widder (46), Theorem V.1.1. Wir geben einen unabhängigen Beweis; vgl. auch Hordijk (71), Lemma 3.

Lemma 10.10.

$$\underline{\Phi}_i^R \le \underline{\chi}_i^R \le \overline{\chi}_i^R \le \overline{\Phi}_i^R \qquad (i \in I,\ R \in \Pi)$$

Beweis:

Es ist $V_{i,\alpha}(R) = \alpha \int_0^\infty du\, e^{-\alpha u} E_i^R K(u)$. Für den c-Teil sieht man das mit Hilfe von $e^{-\alpha t} = \alpha \int_t^\infty du\, e^{-\alpha u}$, für den d-Teil mit Hilfe von Lemma 5.16. O.B.d.A. ist $\overline{\Phi}_i^R < \infty$. Dann existiert zu jedem $M > \overline{\Phi}_i^R$ ein $t_o \ge 0$, sodaß $E_i^R K(t) \le M$ für $t \ge t_o$. Daher ist

$$\alpha V_{i,\alpha}(R) \le \alpha^2 \int_0^{t_o} du\, e^{-\alpha u} E_i^R K(u) + \alpha^2 \int_{t_o}^\infty du\, e^{-\alpha u} u \cdot M$$

$$\le \alpha^2 t_o \cdot \overline{K} + M e^{-\alpha t_o}(1 + \alpha t_o)$$

mit $\overline{K} := \sup\{E_i^R K(u) \mid u \le t_o\} < \infty$ (wegen $\overline{\Phi}_i^R < \infty$). Also gilt $\overline{\lim}_{\alpha \to 0} \alpha V_{i,\alpha}(R) \le M$. Das beweist die letzte Ungleichung in Lemma 10.10.

Lemma 5.16 und der gerade geführte Beweis gelten auch, wenn c und d statt von unten von oben beschränkt sind. Das Ergebnis läßt sich daher auf -c und -d anwenden. Daraus folgt die erste Ungleichung.◇

Beschränkte Kosten

Definiere $\psi_i(\alpha, f) := \alpha V_{i,\alpha}(f) \qquad (i \in I,\ f \in F,\ \alpha > 0)$.

Satz 10.11.

Sei $i \in I$, $f_n, f \in F$, $\alpha_n > 0$ mit $f_n \to f$, $\alpha_n \downarrow 0$.

a) Ist $d \ge 0$ und sind c und d beschränkt, so ist $\underline{\lim}\, \psi_i(\alpha_n, f_n) \ge \Phi_i(f)$.

b) Gilt Bedingung 7.2 (Stetigkeit von $\rho(j,.)$ $(j \in I)$ und Beschränktheit von c und d) und Annahme (10.4), so ist $\lim \psi_i(\alpha_n, f_n) = \Phi_i(f)$.

Beweis:

a) O.B.d.A. ist $c \geq 0$, also $\psi_i(.,.) \geq 0$ $(i \in I)$. (Andernfalls addiere die Konstante $\| c^- \|$ zu c.). Sei $(n') \subset \mathbb{N}$ so, daß $\lim_{n'} \psi_i(\alpha_{n'}, f_{n'}) = \underline{\lim}_{n} \psi_i(\alpha_n, f_n) =: \psi_i$ $(i \in I)$. O.B.d.A. ist $(n') = \mathbb{N}$. Nach Lemma 7.4 (mit (8.10)) ist $\sup\{\psi_i(\alpha_n, f_n) \mid i \in I, n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Wegen (4.17) ist

$$\begin{aligned}\psi_i &= \lim \alpha_n E_i^{f_n}[e^{-\alpha_n S_1} v_{Y_1, \alpha_n}(f_n)] \\ &= \lim \sum_j E_i^{f_n}[e^{-\alpha_n S_1}, Y_1 = j]\psi_j(\alpha_n, f_n) \\ &= \sum_j p_{ij}(f)\psi_j \,.\end{aligned}$$

Beim letzten Gleichheitszeichen wurde der Satz von der majorisierten Konvergenz verwendet und $E_i^{f_n}[e^{-\alpha_n S_1}, Y_1 = j] = P_i^{f_n}\{Y_1 = j\} - E_i^{f_n}[1 - e^{-\alpha_n S_1}, Y_1 = j] \geq p_{ij}(f_n) - \alpha_n E_i^{f_n} S_1 \to p_{ij}(f)$ (10.1,10.2).

Die zu f gehörige EMK ist nicht-dissipativ, siehe (10.8). Ein Satz über Markoffketten (Satz A.12) liefert daher

$$(10.12)\quad \psi_i = \sum_\alpha f^*(i, D_\alpha(f))(f)\psi_\alpha \qquad (i \in I),$$

wobei α die rekurrenten Klasen indiziert und $\psi_\alpha = \psi_j$ für $j \in D_\alpha(f)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}(10.13)\quad \Phi_i(f) &\leq \underline{\lim}\, \Phi_i(f_n) && \text{(Satz 7.5 a))} \\ &= \underline{\lim}\, \alpha_n E_{\pi,i}^{f_n} v_{\alpha_n} && \text{(Satz 5.18)} \\ &= \underline{\lim}\, \alpha_n E_{\pi,i}^{f_n}[e^{-\alpha_n S_1} V_{Y_1,\alpha_n}^{f_n}] && \text{(4.17, 5.20, 8.12)} \\ &= \underline{\lim} \sum_j E_{\pi,i}^{f_n}[e^{-\alpha_n S_1}, Y_1 = j]\psi_j(\alpha_n, f_n) \\ &\leq \underline{\lim} \sum_j P_{\pi,i}^{f_n}\{Y_1 = j\}\psi_j(\alpha_n, f_n) && (\psi_j(.,.) \geq 0) \\ &= \sum_j P_{\pi,i}^{f}\{Y_1 = j\}\psi_j && \text{(Lemma 7.8a), Kor. A.3)}\end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha} f^*(i,D_\alpha(f))(f) \sum_{j\in D_\alpha(f)} p^f_{\pi,\alpha}\{Y_1 = j\}\psi_\alpha \qquad (4.6)$$
$$= \sum_{\alpha} f^*(i,D_\alpha(f))(f)\psi_\alpha$$
$$= \psi_i \qquad (10.12).$$

b) Für eine beliebige Teilfolge $(n') \subset \mathbb{N}$, für die $\lim_{n'} \psi_i(\alpha_{n'},f_{n'}) =: \psi_i$ ($i \in I$) existiert, verläuft der Beweis genauso wie in a). Die beiden "$\leq$"-Zeichen in (10.13) können durch "="-Zeichen ersetzt werden, wenn man statt Lemma 7.5a) und 7.8a) Lemma 7.5b) und 7.8b) verwendet; die fünfte Zeile in (10.13) entfällt. Die Vertauschung von $\lim_n$ und $\sum_j$ ist möglich nach Korollar A.2 und Lemma 7.8a) und b). Da die Teilfolge beliebig gewählt wurde, beweist das $\lim \psi_i(\alpha_n,f_n) = \Phi_i(f)$. ◇

Die Bedingung (10.4)

Bemerkung 10.14.

Satz 10.11. b) läßt sich ohne die Bedingung (10.4) nicht beweisen. Das hat zur Folge, daß im Falle $d^- \neq 0$ die Existenz einer durchschnittsoptimalen Strategie nur unter jener Zusatzvoraussetzung gezeigt werden kann. Sie ist immer erfüllt, wenn die Verteilung von S_1 degeneriert und unabhängig von der von Y_1 ist, denn $\sup\{\eta_i(f) \mid f \in F\} < \infty$ nach (10.2) und Annahme (K). Zwar hängen die Durchschnittskosten $\Phi_i(f)$ bei gegebenen $\rho(j,f)$ nur über $p_{ij}(f)$ und $\eta_i(f)$ von $Q^f_{ij}(t)$ ab, siehe (4.3) und (2.20) ($\mu_{ii} = \sum_j e_{ij}\eta_j$). Aber die diskontierten Kosten $V_{i,\alpha}(f)$ sind explizit von der speziellen Form der $Q^f_{ij}(t)$ abhängig. Eine Folge davon ist, daß sich die Unterhalbstetigkeit von $f \to V_{i,\alpha}(f)$ nur mit Voraussetzungen an die $Q^f_{ij}(t)$ selbst beweisen läßt. Das folgende Beispiel zeigt die Bedeutung von (10.4) für die Behauptung in Satz 10.11b). ◇

Beispiel 10.15.

Sei $I = \{0\}$ einelementig, $c \equiv 0$, $d \equiv 1$, $F = [0,1]$,

$$H^f_0(t) = \begin{cases} (1-f)\cdot[1 \leq t < 1/f] + [1/f \leq t] & (f > 0) \\ [2 \leq t] & (f = 0)\,. \end{cases}$$

Es ist $\mu_{oo}(f) = \eta_o(f) = 2 - f$ $(f \in F)$. Die Annahmen (B), (Ü), (K), (S), (R) und (Z) sind erfüllt. Für $\alpha > 0$ ist

$$V_{o,\alpha}(f) = \int_0^\infty H_o^f(dt)e^{-\alpha t} + E_o^f[e^{-\alpha S_1} V_{o,\alpha}(f)] \qquad (4.17)$$

$$= \int_0^\infty H_o^f(dt)e^{-\alpha t} / \int_0^\infty H_o^f(dt)(1 - e^{-\alpha t})$$

$$\int_0^\infty H_o^f(dt)(1 - e^{-\alpha t}) = \begin{cases} (1-f)\cdot(1-e^{-\alpha}) + f(1-e^{-\alpha/f}) & (f > 0) \\ 1 - e^{-2\alpha} & (f = 0). \end{cases}$$

Damit ergibt sich für $\alpha_n = 1/n^2$, $f_n = 1/n$, $f = 0$:

$$\lim \alpha_n V_{o,\alpha_n}(f_n) = 1/2 = \Phi_o(f) \ ;$$

aber für $\alpha_n = 1/n$, $f_n = 1/n^2$:

$$\lim \alpha_n V_{o,\alpha_n}(f_n) = 1 > \Phi_o(f).$$

Das Beispiel zeigt auch - indem man $d \equiv -1$ setzt -, daß in Satz 10.11a) auf die Voraussetzung $d \geq 0$ nicht verzichtet werden kann. Für jede Folge $f_n \to f = 0$ gilt (mit $d \equiv -1$) $V_{o,\alpha}(f_n) \to -e^{-\alpha}/(1 - e^{-\alpha}$ $< -e^{-2\alpha}/(1 - e^{-2\alpha}) = V_{o,\alpha}(f)$ $(\alpha > 0)$. Also sind die diskontierten Kosten nicht unterhalb stetig. ◇

Die Hauptsätze

Satz 10.16.

Für $i \in I$, $f_n \to f \in F$, $\alpha_n \downarrow 0$ gilt

$$\varliminf_{n\to\infty} \psi_i(\alpha_n, f_n) \geq \Phi_i(f) \ .$$

Beweis:

Es kann angenommen werden, daß $c \geq 0$, $d \geq 0$: Anderfalls addiere zu $c\,\|c^-\|$ und zu $d\,\|d^-\|$ und wende Satz 10.11 an. (Hier geht die Voraussetzung (10.4) ein!) Wir approximieren die Kosten durch solche die die Voraussetzungen von Satz 10.11 erfüllen.

Sei $u^{(k)}: I \times F \to \mathbb{R}_+$ eine nicht-fallende Folge von beschränkten Funktionen, die in der zweiten Komponente stetig sind, mit der Eigenschaft $u^{(k)}(i,f) \uparrow \rho(i,f)/\eta_i(f)$ $(i \in I, f \in F)$. Die Existenz einer solchen Folge ergibt sich aus einem Satz von Baire (siehe z.B. Schubert (71), Seite 134). Definiere $c^{(k)} := 0$, $d^{(k)}(i,f) := u^{(k)}(i,f) \cdot \eta_i(f)$ $(i \in I, f \in F)$. Dann erfüllt $\rho^{(k)}$ die Bedingung 7.2, und es gilt $\rho^{(k)}(i,f) \uparrow \rho(i,f)$ $(i \in I, f \in F)$. Satz 10.11 impliziert daher (mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz):

$$\Phi_i(f) = \lim_{k\to\infty} \Phi_i^{(k)}(f) \leq \lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha_n V_{i,\alpha_n}^{(k)}(f_n)$$
$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha_n V_{i,\alpha_n}(f_n)$$

für alle $i \in I$, $f_n \to f \in F$, $\alpha_n \downarrow 0$. ◇

Bemerkung 10.17.

Satz 10.11 und Satz 10.16 gelten unverändert, wenn $d(Y_n, Y_{n+1})$ zur Zeit S_n statt zur Zeit S_{n+1} anfällt (vgl. Bemerkung 4.1). Eine Änderung im Beweis wird nur bei (10.13) notwendig; vgl. dazu Bemerkung 5.21. ◇

Bemerkung 10.18

Wegen Satz 10.11 braucht für Satz 10.16 die Annahme (10.5) nur für $\alpha = 0$ gemacht zu werden, wenn c und d beschränkt sind. ◇

Lemma 10.19.

$$\Phi_i^* = \inf_{f\in F} \Phi_i(f) \leq \overline{\lim_{\alpha\to 0}} \inf_{f\in F} \psi_i(\alpha,f) \qquad (i \in I) .$$

Beweis:

Sei $i \in I$ und $\varepsilon > 0$. Für alle $f \in F$ existiert ein $\delta_f > 0$ und eine Umgebung U_f von f, sodaß $\Phi_i(f) \leq \psi_i(\alpha,g) + \varepsilon$ $(\alpha \leq \delta_f, g \in U_f)$, nach Satz 10.16. Wegen der Kompaktheit von F (Annahme (K)) gibt es $f_1,\ldots,f_n \in F$ mit $\bigcup_{k=1}^{n} U_{f_k} = F$. Mit $\delta := \min\{\delta_{f_1},\ldots,\delta_{f_n}\}$ hat man $\Phi_i(f_k) \leq \psi_i(\alpha,g) + \varepsilon$ $(\alpha \leq \delta, g \in U_{f_k}, 1 \leq k \leq n)$. Daher ist für

ein geeignetes $g \in F$ und $k \in \{1,\dots,n\}$ mit $g \in U_{f_k}$:

$$\Phi_i^* \le \Phi_i(f_k) \le \psi_i(\alpha,g) + \varepsilon \le \inf_f \psi_i(\alpha,f) + 2\varepsilon,$$

also $\Phi_i^* \le \inf_f \psi_i(\alpha,f) + 2\varepsilon$ für alle $\alpha \le \delta$. ◆

Satz 10.20.

$$\lim_{\alpha\to 0} \inf_{f\in F} \psi_i(\alpha,f) = \lim_{\alpha\to 0} \alpha\, V^*_{i,\alpha} = \inf_{R\in\Pi} \chi_i(R) = \inf_{R\in\Pi} \overline{\chi}_i(R)$$
$$= \inf_{R\in\Pi} \overline{\Phi}_i(R) = \Phi_i^* \qquad (i \in I)$$

Beweis:

$$\Phi_i^* \le \underline{\lim_{\alpha\to 0}} \inf_{f\in F} \psi_i(\alpha,f) \qquad \text{(Lemma 10.19)}$$
$$\le \underline{\lim_{\alpha\to 0}}\ \alpha \inf_{R\in\Pi} V_{i,\alpha}(R) \qquad \text{(Annahme (D))}$$
$$\le \inf_{R\in\Pi} \underline{\lim_{\alpha\to 0}}\ \alpha\, V_{i,\alpha}(R) = \inf_{R\in\Pi} \chi_i(R)$$
$$\le \inf_{R\in\Pi} \overline{\chi}_i(R)$$
$$\le \inf_{R\in\Pi} \overline{\Phi}_i(R) \qquad \text{(Lemma 10.10)}$$
$$\le \inf_{f\in F} \overline{\Phi}_i(f)$$
$$= \inf_{f\in F} \Phi_i(f) = \Phi_i^* \qquad \text{(Satz 5.1)}$$

In den ersten drei Zeilen kann $\underline{\lim}_{\alpha\to 0}$ durch $\overline{\lim}_{\alpha\to 0}$ ersetzt werden. ◆

Satz 10.21.

Für jeden Startpunkt $i \in I$ existiert eine optimale Strategie $f \in F$, d.h.

$$\Phi_i^* = \Phi_i(f) = \begin{cases} \overline{\Phi}_i(f) = \inf_{R\in\Pi} \overline{\Phi}_i(R) \\ \overline{\chi}_i(f) = \inf_{R\in\Pi} \overline{\chi}_i(R) \\ \underline{\chi}_i(f) = \inf_{R\in\Pi} \underline{\chi}_i(R) \end{cases}$$

Beweis:

Das folgt wegen der Kompaktheit von F (Annahme (K)) aus Satz 5.15, Satz 7.5 und Satz 10.20.◇

Satz 10.22.

Sei $f_n, f \in F$ und $\alpha_n, \varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha_n \downarrow 0$, $\alpha_n \varepsilon_n \to 0$ und $f_n \to f$. Es gelte $V_{i,\alpha_n}(f_n) \leq V^*_{i,\alpha_n} + \varepsilon_n$ $(n \in \mathbb{N})$ für einen/für alle Startpunkt(e) $i \in I$. Dann ist f durchschnittsoptimal für i/für alle $i \in I$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \Phi_i(f) &\leq \underline{\lim}\, \psi_i(\alpha_n, f_n) && \text{(Satz 10.16)} \\ &\leq \underline{\lim}\, \alpha_n (V^*_{i,\alpha_n} + \varepsilon_n) \\ &= \Phi^*_i && \text{(Satz 10.20) .◇} \end{aligned}$$

§11 Abhängigkeit vom Startpunkt

Die durchschnittsoptimale Politik aus Satz 10.21 ist abhängig vom Startpunkt $i \in I$. Das Gleiche gilt für Φ_i^*. Zum Schluß dieses Kapitels sollen noch Voraussetzungen angegeben werden, unter denen die genannten Größen unabhängig vom Startpunkt sind. Bei optimalen Politiken ist das nach Satz 10.22 dann der Fall, wenn für das diskontierte Kriterium Strategien aus F existieren, die gleichmäßig für alle Startpunkte ε-optimal sind. Die Bedingungen in diesem Paragraphen betreffen nur die Durchschnittskosten. Insbesondere sind es Forderungen an die Struktur der EMK's. Sie implizieren zusätzlich, daß die optimalen Kosten unabhängig vom Startpunkt sind, was für praktische Berechnungen nützlich sein kann.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß ein $f \in F$, das gleichmäßig für alle Startpunkte optimal ist, genau dann existiert, wenn zusätzlich zu den Voraussetzungen von §10 - die auch in diesem Paragraphen erfüllt sein sollen - die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(11.1) \quad \forall f_1, f_2 \in F \quad \exists f \in F \quad \forall i \in I \quad \Phi_i(f) \leq \Phi_i(f_1) \wedge \Phi_i(f_2).$$

Unter (11.1) läßt sich nämlich nach Satz 10.21 eine Folge (f_n) konstruieren, sodaß f_n für alle Startpunkte aus einer endlichen Menge I_n optimal ist. Dabei gelte $I_n \subset I_{n+1}$, $\cup I_n = I$. Aufgrund der Kompaktheitsannahme (K) haben die f_n einen Häufungspunkt f. Nach Satz 7.5 ist dieses f optimal für alle Startpunkte.

Für ein Markoff-Modell (mit überabzählbarem Zustandsraum) beweist Wijngaard (75) die Aussage (11.1) unter der Voraussetzung (auf unser Modell übertragen):

$$(11.2) \quad \forall f_1, f_2 \in F, J \subset I \quad \exists f \in F \begin{cases} \forall i \in J & p_i^f = p_i^{f_1} \\ \forall i \in I \setminus J & p_i^f = p_i^{f_2} \end{cases}$$

Das Entscheidungsmodell heißt dann "vollständig". Wenn F die Menge aller stationären Strategien ist, ist (11.2) offenbar erfüllt. Wijngaard's Ergebnis läßt sich mit einigen Modifikationen auf unseren Fall übertragen, was hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden soll.

Aussage (11.1) ist in dem einfachen Fall erfüllt, wo für jedes $f \in F$ die EMK nur eine rekurrente Klasse besitzt. Dann ist nämlich $\Phi_i(f)$ unabhängig von $i \in I$ $(f \in F)$. Das Gleiche gilt natürlich auch für Φ_i^*.

Kommunizierende Entscheidungsmodelle

Wir führen die folgenden Begriffe ein.

Definition.

Das Entscheidungsmodell heißt kommunizierend, wenn gilt

$$(11.3) \quad \forall_j \in \bigcup_{f\in F} D(f) \qquad \inf_{f\in F} \sup_{f\in F} f^*_{ij}(f) > 0.$$

Bemerkung 11.4.

Es läßt sich zeigen, daß diese Definition für ein vollständiges Entscheidungsmodell zur Definition von "communicative" in Wijngaard (75) äquivalent ist. Der Begriff ist mit den folgenden Begriffen von Bather (73) und Hordijk (74) verwandt:

$$(11.5) \quad \sup_{f\in F} f^*_{ij}(f) > 0 \qquad (i,j \in I,\ i \neq j) \qquad \text{("communicating")}$$

$$(11.6) \quad \sup_{f\in F} f^*_{ij}(f) = 1 \qquad (i,j \in I) \qquad \text{("recurrent")}$$

Letzteres ist nach Theorem 8.7 in Hordijk (74) äquivalent zu

$$\inf_{i\in I} \sup_{f\in F} f^*_{ij}(f) > 0 \qquad (j \in I).$$

Offenbar impliziert (11.6) (11.3) und (11.5). Umgekehrt gilt: (11.5) zusammen mit

$$\exists j \in I \quad \inf_{i\in I} \sup_{f\in F} f^*_{ij}(f) > 0$$

impliziert (11.6) (vgl. Hordijk (74), Theorem 8.8). ◇

Definition (vgl. Wijngaard (75))

Sei $F_1 := \{f \in F \mid \nu(f) = 1\}$ die Menge der Strategien aus F, die nur eine rekurrente Klasse haben. Wir sagen, daß F von F_1 "dominiert" wird, wenn für alle $f \in F$ ein $f_1 \in F_1$ existiert mit $\Phi_i(f_1) \prec \Phi_i(f)$ $(i \in I)$.

Satz 11.7 (Wijngaard (75))

In einem kommunizierenden, vollständigen Entscheidungsmodell wird F von F_1 dominiert. Die optimalen Durchschnittskosten Φ_i^* sind unabhängig von $i \in I$ und gleich $\inf\{\Phi_i(f_1) \mid f_1 \in F_1\}$.

Beweis:

Sei $f \in F$, $n \in \mathbb{N}$ und $j \in D(f)$ so, daß $\Phi_j(f) \leq \inf_{i \in I} \Phi_i(f) + 1/n$ (vgl. (4.7)). Nach Hordijk (74), Theorem 8.7 existiert ein $f' \in F$ mit $f^*_{ij}(f') = 1$ $(i \in I)$. Sei K die Rekurrenzklasse von j unter f. Definiere $f_n \in F$ so, daß $P_i^{f_n} = P_i^f$ für $i \in K$ und $P_i^{f_n} = P_i^{f'}$ für $i \in I \setminus K$. Es gilt $f_n \in F_1$, $D(f_n) = K$. Denn für $i,h \in K$ ist $f^*_{ih}(f_n) = f^*_{ih}(f) = 1$, $f^*(i,K^c)(f_n) = f^*(i,K^c)(f) = 0$, und für $i \in I \setminus K$ ist $f^*(i,K)(f_n) = f^*(i,K)(f') \geq f^*_{ij}(f') = 1$. Nach (4.7) ist für alle $i \in I$ $\Phi_i(f_n) = \Phi_j(f_n) = \Phi_j(f) \leq \Phi_i(f) + 1/n$.

Nach Satz 6.18 und Annahme (Z) ist ν unterhalb stetig. Daher ist F_1 kompakt. Für einen Häufungspunkt $f_o \in F_1$ der f_n gilt nach Satz 7.5 $\Phi_i(f_o) \leq \Phi_i(f)$ $(i \in I)$.

Die zweite Behauptung folgt aus der Tatsache, daß $\Phi_i(f)$ für $f \in F_1$ unabhängig von $i \in I$ ist (siehe (4.7)). ◇

Bemerkung 11.8.

Der Satz gilt bereits, wenn man nur die Generalannahme aus §2 voraussetzt und zusätzlich $\inf\{\eta_i(f) \mid f \in F, i \in I\} > 0$ (damit $\Phi_i(f)$ wohldefiniert ist) und $\nu(f) < \infty$ $(f \in F)$. Im Beweis kann dann nämlich $j \in D(f)$ so gewählt werden, daß $\Phi_j(f) = \min_{i \in I} \Phi_i(f)$.

Korollar 11.9.

Das Entscheidungsmodell sei kommunizierend und vollständig. Dann existiert ein $f \in F_1$ mit

$$\Phi_i^* = \Phi_i(f) = \begin{cases} \overline{\Phi}_i(f) = \inf_{R \in \Pi} \overline{\Phi}_i(R) \\ \overline{\chi}_i(f) = \inf_{R \in \Pi} \overline{\chi}_i(R) \\ \underline{\chi}_i(f) = \inf_{R \in \Pi} \underline{\chi}_i(R) \end{cases} \qquad (i \in I) \ . \diamond$$

Kapitel IV DISKUSSION DER ERGEBNISSE

§12 Vergleich mit bekannten Resultaten

In diesem Paragraphen werden unsere Ergebnisse mit denen anderer Autoren in Zusammenhang gebracht. Ihre Modelle lassen sich mit dem aus Kapitel III erfassen, siehe Schluß von §8. Soweit der Semi-Markoff-Fall behandelt wird, legen die meisten Autoren das Kriterium

$$\bar{\psi}_i(R) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{E_i^R K(S_n)}{E_i^R S_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{E_i^R \sum_{m=0}^{n-1} \rho(Y_m, \Delta_m)}{E_i^R \sum_{m=0}^{n-1} \eta_{Y_m}(\Delta_m)}$$

ihren Untersuchungen zugrunde. Sind die Einstufenkosten ρ gegeben, so ist offenbar $\bar{\psi}_i(R)$ unabhängig von dem Prozeß (Z_t). Das Modell kann daher entsprechend vereinfacht werden; insbesondere braucht man die Kostenrate c nicht explizit einzuführen. Falls es für stationäre Strategien f nur eine rekurrente Klasse gibt - und nur in diesem Fall scheint das Kriterium $\bar{\psi}_i(R)$ sinnvoll zu sein (vgl. Bemerkung 5.13) -, ist $\bar{\psi}_i(f) = \Phi_i(f) = \bar{\Phi}_i(f)$, siehe Korollar 5.11. Es ist nicht bekannt, ob das auch für beliebige Strategien R gilt.

$\bar{\psi}_i(R)$ ist ein Funktional des Prozesses (Y_n). Die Abhängigkeit von (S_n) erscheint nur in den $\eta_i(a)$. Daher sind alle Ergebnisse bzgl. $\bar{\psi}_i(R)$ unabhängig von der speziellen Gestalt der $Q_{ij}^a(t)$. Es kann also angenommen werden, daß die Verteilung von S_1 degeneriert und unabhängig von der von Y_1 ist. Die Annahmen (10.3) und (10.4) sind dann automatisch erfüllt (vgl. Bemerkungen (10.7) und (10.14)); Annahme (Ü) folgt aus der Annahme

(12.1) $\exists \delta > 0 \quad \forall i \in I,\ a \in A(i) \qquad \delta \leq \eta_i(a) < \infty,$

vgl. (8.12).

In §10 und §11 war F eine kompakte Teilmenge der stationären Strategien, für die Annahme (D) gilt (vgl. Bemerkung 8.15). Das ist eine nicht unwesentliche Verallgemeinerung gegenüber dem Fall, wo F die Menge aller stationären Strategien ist. Denn die Rekurrenzannahme (R) und die Zusammenhangsannahme (Z) brauchen nur für die

Strategien aus F erfüllt zu sein. Das läßt sich häufig einfacher nachprüfen (vgl. die Beispiele in §13 und §14). Gleichzeitig erhält man das stärkere Ergebnis, daß es eine durchschnittsoptimale Politik gibt, die in der Menge F liegt. Das ist vor allem dann interessant, wenn es in speziellen Modellen um die Existenz strukturierter durchschnittsoptimaler Politiken geht. (Für ein Lagerhaltungsmodell - also ein Markoff-Modell - wird dies in Hordijk (74), 10.15 ausgenutzt.) Wenn es strukturierte diskontiert-optimale Strategien gibt, insbesondere also Annahme (D) für die Menge der strukturierten Politiken erfüllt ist, dann kann mit den Ergebnissen aus §10 geschlossen werden, daß es auch eine strukturierte durchschnittsoptimale Politik gibt.

In diesem Paragraphen sei F die Menge aller stationären Strategien.

Die Annahmen (K) und (S) sind sehr natürlich und werden von den meisten Autoren gemacht. Daß ρ_α von α abhängt, wird dabei häufig nicht erwähnt. Diese Abhängigkeit verschwindet, wenn $c = 0$ ist und $d(Y_n, \Delta_n, Y_{n+1})$ zur Zeit S_n anfällt.

Beim Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren interessiert nach dem Vorangehenden in erster Linie die Rekurrenzannahme (R), die Zusammenhangsannahme (Z) und Annahme (B) über die Beschränktheit der Kosten.

Grenzübergang von den diskontierten Kosten mit der Optimalitätsgleichung

Der gebräuchlichste Ansatz bei der Untersuchung der Existenz von durchschnittsoptimalen Strategien ist der folgende. Zunächst werden Bedingungen angegeben, unter denen aus der Optimalitätsgleichung für die diskontierten Kosten ($\alpha > 0$):

$$(12.2)\quad V^*_{i,\alpha} = \inf\{\rho_\alpha(i,a) + E_i^a\, e^{-\alpha S_1}\, V^*_{Y_1,\alpha} \mid a \in A(i)\} \quad (i \in I)$$

durch Grenzübergang $\alpha \downarrow 0$ die Optimalitätsgleichung für die Durchschnittskosten bewiesen werden kann:

$$\exists v\colon I \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g \in \mathbb{R}$$

$$(12.3)\quad v(i) = \inf\{\rho(i,a) - g\,\eta_i(a) + E_i^a v(Y_1) \mid a \in A(i)\} \qquad (i \in I).$$

Unter einer zusätzlichen Voraussetzung kann dann gezeigt werden, daß ein f, das die rechte Seite von (12.3) minimiert, durchschnittsoptimal ist (und daß $g = \overline{\Phi}_i^*$ für alle $i \in I$). Die Gültigkeit der Optimalitätsgleichung (12.2) für unser Modell folgt übrigens aus den Sätzen 8.13 und 8.14.

Arbeiten, die den genannten Ansatz verwenden, sind u.a. Ross (68) und Federgruen und Tijms (78). Die Rekurrenzbedingungen, die in diesen Arbeiten vorausgesetzt werden, - z.B. gleichmäßige Rekurrenz zu einem Punkt, simultane Doeblin-Bedingung - haben zur Folge, daß die Rückkehrzeiten in eine endliche Menge gleichmäßig bzgl. der Strategien und bzgl. des Startpunkts beschränkt sind. (Vgl. Federgruen et al. (78b) zu Beziehungen zwischen diesen Bedingungen.) Das hat zur Folge, daß die Bedingungen in vielen Anwendungen, z.B. in Warteschlangenmodellen, nicht erfüllt sind.

Hordijk (74), Theorem 5.1 gibt eine Liapunoff-Bedingung, die nicht so restriktiv ist. Federgruen et al. (79) verallgemeinern sie und zeigen, daß ihre Bedingungen von den bisher genannten impliziert werden.

Die Bedingungen von Federgruen, Hordijk und Tijms (79)

In unserer Terminologie lauten sie wie folgt:

Es existiert eine endliche Menge $K \subset I$ mit

$$(12.4)\quad u^*(i) := \sup\{\mu_{iK}(f) \mid f \in F\} < \infty \quad (i \in I)$$
$$y^*(i) := \sup\{E_i^f K_{abs}(T_{K1}) \mid f \in F\} < \infty \quad (i \in I);$$

Für alle $f \in F$ besitzt die Markoffkette nur eine rekurrente Klasse;

$$(12.5)\quad E_i^f u^*(Y_1) \text{ und } E_i^f y^*(Y_1) \text{ sind endlich und stetig abhängig von } f \in F \quad (i \in I);$$

$$(12.6)\quad \lim E_i^f[u^*(Y_n), n < \tau_{K1}] = 0$$
$$\lim E_i^f[y^*(Y_n), n < \tau_{K1}] = 0 \qquad (i \in I,\ f \in F).$$

Daneben wird verlangt, daß unsere Bedingungen (K), (S) und (12.1)

erfüllt sind. (Tatsächlich wird für die Kosten stetige Abhängigkeit von $f \in F$ gefordert. Die Beweise bleiben aber richtig, wenn nur die Unterhalbstetigkeit gilt.)

Man sieht zunächst, daß (12.4) impliziert: $|\rho(i,a)| \leq y^*(i)$ $(i \in I, a \in A(i))$. Anstelle dieser Beschränktheitsvoraussetzung haben wir angenommen, daß ρ von unten beschränkt ist. Nach oben darf ρ unbeschränkt sein. Unsere Ergebnisse lassen sich noch etwas verallgemeinern, wenn man eine untere Beschränkungsfunktion einführt; vgl. dazu für den Fall diskontierter Kosten z.B. Rieder (75).

Federgruen et al. (79) zeigen, daß aus (12.4) für jedes $i \in I$ die Beschränktheit von $m_{iK}(.)$ folgt. Sie vermuten (S. 227), daß diese Beschränktheit impliziert, daß die Familie der stationären W-Maße $\{j \to \pi_{ij}(f) | f \in F\}$ (hier unabhängig von $i \in I$, wegen $\nu(.) = 1$) straff ist. Diese Vermutung ist falsch. Denn z.B. im Fall irreduzibler Markoffketten folgt (mit den Bedingungen (K) und (S)) aus der Straffheit die Existenz einer stationären durchschnittsoptimalen Strategie, siehe Schäl (77) (oder unsere Ergebnisse in §10, in Verbindung mit Satz 6.29). Wie aber Federgruen et al. (79) auf S. 233 selbst bemerken, ist es nach einem Beispiel von Fisher und Ross (68) möglich, daß (12.4) und (12.5) erfüllt (und die Markoffketten irreduzibel und positiv rekurrent) sind und daß dennoch jede optimale Strategie nicht-stationär ist. Andererseits zeigt Satz 6.29, daß aus der Straffheit von $\{j \to \pi_{ij}(f) | f \in F\}$ im Fall irreduzibler Markoffketten (sodaß die $m_{iK}(.)$ endlich sind) die Stetigkeit und daher die Beschränktheit der $m_{iK}(.)$ folgt $(i \in I)$.

Die Bedingung (12.4) impliziert unsere Annahme (R). Weiter folgt nach Satz 7.9 die Annahme (Z) aus den u^* betreffenden Bedingungen in (12.4) - (12.6). Dabei braucht (12.6) sogar nur für $i \in K$ erfüllt zu sein.

Unsere Bedingungen verbessern also die von Federgruen et al. (79) in verschiedener Hinsicht:

a) Die EMK's dürfen mehrere rekurrente Klassen haben.
b) Für die Kosten sind nach oben keine Beschränkungsfunktionen erforderlich.

c) Die Annahmen (R) und (Z) (mit Hilfe von Satz 6.18) sind u.U. leichter zu überprüfen als (12.4) - (12.6). Dies gilt insbesondere dann, wenn $\sup\{\eta_i(a) \mid i \in I, a \in A(i)\} < \infty$. Nach Satz 6.31 können in dem Fall nämlich die Bedingungen in Satz 6.29 und Satz 7.13 herangezogen werden. Vgl. dazu auch das Beispiel in §14.

Federgruen et al. (79) beweisen unter den Bedingungen (12.4), (12.5) die Gültigkeit der Optimalitätsgleichung (12.3) und unter den Bedingungen (12.4) - (12.6) die Existenz einer sogenannten "stark optimalen" Politik $f \in F$: $\overline{\psi}_i(f) \leq \underline{\psi}_i(R) := \underline{\lim}\, E_i^R K(S_n)/E_i^R S_n$ für alle Startpunkte i und Strategien R. In dieser Hinsicht sind ihre Ergebnisse also stärker als unsere.

Grenzübergang von den diskontierten Kosten ohne die Optimalitätsgleichung

Hordijk (71, 74) beweist zum ersten Mal die Existenz durchschnittsoptimaler Strategien in einem Markoff-Modell, ohne die Optimalitätsgleichung zu benutzen. Im Fall irreduzibler Markoffketten verallgemeinert Schäl (77a) das Ergebnis für unbeschränkte Kosten. Schäl's Bedingungen lauten:

(12.7) Für alle $f \in F$ ist die Markoffkette irreduzibel und positiv rekurrent;

(12.8) $\{\pi_\cdot(f)\}_{f\in F}$ ist eine straffe Familie von W-Maßen.

Dabei ist $\pi_j(f) := \pi_{ij}(f) = \lim n^{-1} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(n)}(f)$ das stationäre W-Maß für die Markoffkette (unabhängig von $i \in I$).

Bedingung (12.7) impliziert unsere Annahme (R). Unter (12.7) ist (12.8) äquivalent zu

(12.9) $f \to \pi_{ij}(f)$ ist stetig $(i,j \in I)$,

siehe Satz 6.29. Also gilt unsere Annahme (Z).

Hordijk (71, 74) gibt (12.9) direkt als Bedingung an. Statt (12.7) fordert er, daß $j \to \pi_{ij}(f)$ ein W-Maß ist ($i \in I$, $f \in F$). Das ist

äquivalent zu $(\tilde{R})$, daß die Markoffketten nicht-dissipativ sind. Daraus läßt sich Annahme (R) nicht schließen. Diese wird jedoch wesentlich nur für die Darstellung der Durchschnittskosten mit Hilfe der stationären W-Maße gebraucht (Satz 5.1). Bei Markoffketten mit beschränkten Kosten gilt sie bereits unter der schwächeren Bedingung $(\tilde{R})$ von Hordijk (vgl. Bemerkung 5.10.)

Die genannten Bedingungen von Hordijk (71, 74) und Schäl (77a) werden also durch unsere Bedingungen abgeschwächt. Die Ergebnisse in §10 sind direkte Verallgemeinerungen der Resultate und der Beweise jener Arbeiten auf den Semi-Markoff-Fall. Gleichzeitig entfallen die Einschränkungen "irreduzible Markoffketten" (Schäl) und "beschränkte Kosten" (Hordijk).

Hordijk (74) beweist die Existenz von durchschnittsoptimalen Strategien für das Markoff-Modell auch unter den folgenden Bedingungen:

(12.10) $\{\pi_{i.}(f)\}_{f\in F}$ ist eine straffe Familie von W-Maßen $(i \in I)$;

(12.11) das Entscheidungsmodell ist rekurrent (siehe (11.6)).

Sein Beweis zeigt, daß in (12.11) "rekurrent" zu "kommunizierend" abgeschwächt werden kann. Eine Bemerkung (Hordijk (74), S. 89) sagt, daß die optimale Strategie sogar aus F_1 gewählt werden kann.

Diese Ergebnisse scheinen nicht so leicht auf den Semi-Markoff-Fall zu übertragen zu sein. Vgl. jedoch Satz 6.29 und Satz 11.7.

Wijngaard's Ansatz

Wijngaard (75) untersucht für ein Markoff-Modell mit überabzählbarem Zustandsraum die Existenz durchschnittsoptimaler Strategien in einer Klasse von stationären Strategien. Er bemerkt (Wijngaard (77)), daß sich seine Methode auch auf den Semi-Markoff-Fall übertragen läßt. Für den abzählbaren Fall kann man seine Bedingungen wie folgt zusammenfassen (siehe Wijngaard (79)):

— $\rho \gtrsim 0$;

— $\exists \varepsilon > 0$, $\omega\colon I \to [\varepsilon,\infty)$, $M < \infty$, $K \subset I$ (K endlich) mit

$\rho(i,f) \leq M \cdot \omega(i) \qquad (i \in I,\ f \in F)$,

$\sum_j p_{ij}(f)\omega(j) \leq M\omega(i) \qquad (i \in I,\ f \in F)$,

$E_i^f \sum_{n=0}^{\tau_{K1}-1} \omega(Y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} E_i^f[\omega(Y_n), n < \tau_{K1}]$ ist endlich

$(f \in F,\ i \in I)$, und die Reihe konvergiert gleichmäßig bzgl. $f \in F \quad (i \in K)$;

—— für alle $f \in F$ besitzt die Markoffkette nur eine rekurrente Klasse.

Diese Bedingungen implizieren unsere Annahmen (R) und (Z) (siehe Satz 6.29). Aus ihnen folgt also bereits die Existenz durchschnittsoptimaler Strategien in der Klasse aller Strategien, sofern für die Menge F Annahme (D) gilt.

Diese letzte Annahme paßt allerdings nicht in Wijngaard's Ansatz, da er diskontierte Kosten nicht verwendet. In Wijngaard (79) wird die Existenz von durchschnittsoptimalen Strategien in einer größeren Klasse von Strategien - sie ist immer noch kleiner als die Menge aller Strategien, vermutlich aber für alle praktischen Zwecke groß genug - unter der folgenden Voraussetzung, zusätzlich zu den oben genannten, bewiesen:

(12.12) $\exists \varepsilon > 0$, $h: I \to [\varepsilon, \infty)$, h unbeschränkt auf jeder unendlichen Menge, mit $\rho(i,f) \geq h(i)$ $(i \in I,\ f \in F)$.

Diese Bedingung bedeutet, daß die Kosten "im strengen Sinne unbeschränkt" sind.

Bedingung (12.12) wird in Wijngaard (78) und in Wijngaard (79) verwendet, um die Existenz durchschnittsoptimaler Strategien zu beweisen, wenn die Markoffketten nicht für alle Strategien Rekurrenzannahmen erfüllen.

§13 M/G/1-Wartesystem mit schaltbarem Bediener

Ein M/G/1-Wartesystem mit schaltbarem Bediener wurde zuerst von Heyman (68) behandelt. Seine Ergebnisse erweiterten Bell (71) und andere. Langen (76) beweist für das diskontierte Problem die Optimalität sogenannter Kontrollgrenzenpolitiken und gibt eine geschlossene Darstellung für deren Werte. Schellhaas (79) enthält ebenfalls eine Darstellung für die Werte von Kontrollgrenzenpolitiken, sowohl für die diskontierten als auch für die Durchschnittskosten. Wir verwenden die Bezeichnungen von Langen (76).

Gemäß einem Poisson-Prozeß mit Rate $\lambda > 0$ kommen Kunden in ein Wartesystem mit einem Bediener. Deren Bedienungszeit ist, unabhängig von dem Ankunftsstrom und von vorangegangenen Bedienungen, durch eine Verteilung $\tilde{B}$ auf $\mathbb{R}_+$ gegeben. Die erwartete Dauer einer Bedienung sei $\mu := \int_0^\infty \tilde{B}(dt)t$; die Verkehrsintensität $\rho := \lambda\mu$ sei kleiner als 1. Die Verteilung der Zwischenankunftszeiten werde mit $\tilde{A}$ bezeichnet, also $\tilde{A}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0)$. Schließlich seien A und B die Laplace-Transformierten (LT) von $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$.

Zur Steuerung des Systems kann der Bediener ein- und ausgeschaltet werden. Zulässige Zeitpunkte dafür sind Ankunftszeitpunkte, falls nicht bedient wird, und Bedienungsbeendigungen, falls bedient wird. Zu jedem Entscheidungszeitpunkt läßt sich der Zustand das Systems durch ein Paar $\langle m,j \rangle$ beschreiben, wobei $m \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Kunden im System und $j \in \{0,1\}$ die Betriebsstufe des Bedieners ist. Hier steht 1 für angeschaltet und 0 für ausgeschaltet. Es sind alle Strategien erlaubt, bei denen die Entscheidungen von den vergangenen Zuständen und Entscheidungen abhängen.

"Kontrollgrenzenpolitik" wird jedoch stationäre Strategie f_l^k $(k,l \in \mathbb{Z}, -1 \leq l < k)$ der folgenden Art genannt. Ist der Bediener eingeschaltet, bleibt er eingeschaltet, solange mehr als l Kunden im System sind; anderenfalls wird er ausgeschaltet. Ist er ausgeschaltet, wird er eingeschaltet, sobald k oder mehr Kunden im System sind; anderenfalls bleibt er ausgeschaltet. Von speziellem Interesse sind die Politikenmengen $F_0 := \{f_0^k | k \in \mathbb{N}\}$ und

$F_{-1} := \{f_{-1}^k | k \in \mathbb{N}_o\}$.

Zu dem System gehört die folgende Kosten- und Gewinnstruktur. R_1 und R_2 sind Kosten, die bei Ein- bzw. Ausschalten des Bedieners entstehen ("Umschaltkosten"). Wenn der Bediener eingeschaltet ist, fallen pro Zeiteinheit Kosten der Größe r an ("Betriebskosten"). Für jeden Kunden, der sich im System befindet, werden pro Zeiteinheit Kosten der Größe h berechnet ("Aufenthaltskosten"). Am Ende jeder Bedienung fällt ein Gewinn s an. Alle Größen sind nichtnegativ, und es gilt $h > 0$ oder $r < s/\mu$. Diese Annahme ist ökonomisch sinnvoll, da es anderenfalls keinen Vorteil bringt, den Bediener überhaupt einzuschalten.

Dieses Modell läßt sich nach Langen (76) durch das allgemeine Modell von Schäl (75), daher nach §8 auch durch unser Entscheidungsmodell beschreiben. Dabei ist $I = \mathfrak{Z} = \mathbb{N}_o \times \{0,1\}$, $A = \{0,1\}$, S_n die Folge der Entscheidungszeitpunkte, Y_n die Folge der Systemzustände $\langle m,j\rangle$ zu diesen Zeitpunkten, Δ_n die Folge der Entscheidungen und Z_t der Zustand des Systems zur Zeit t. Die Sprungkosten R_1 und R_2 fallen zu Beginn einer Periode an, die (negativen) Sprungkosten -s am Ende einer Periode (vgl. Bemerkung 4.1).

Langen (76) beweist die folgenden Resultate, wenn mit $\alpha > 0$ diskontiert wird. Seine Voraussetzung "D < O" ist für kleine α erfüllt, wegen unserer Annahme "$h > 0$ oder $r < s/\mu$".

Satz 13.1.

Es existiert eine α-optimale Strategie aus der Menge $F_o \cup F_{-1} =: F$. Die erwarteten diskontierten Kosten bei Start in Zustand $\langle 0,0\rangle$ sind für Politiken aus F wie folgt gegeben:

$$V_\alpha(k) := V_{\langle 0,0\rangle,\alpha}(f_o^k) = V_\alpha(\infty) + \frac{A(\alpha)^k}{1-A(\alpha)^k G(\alpha)^k} \cdot (D_\alpha + G(\alpha)^k (R - D_\alpha)),$$

(13.2)

$$W_\alpha(k) := V_{\langle 0,0\rangle,\alpha}(f_{-1}^k) = V_\alpha(\infty) + A(\alpha)^k D_\alpha + A(\alpha)^k G(\alpha)^k E_\alpha .$$

Dabei ist

$$V_\alpha(\infty) = (h/\alpha)A(\alpha)(1 - A(\alpha))^{-1} ,$$

$$R = R_1 + R_2 ,$$

$$D_\alpha = R_1 + r/\alpha - (h/\alpha + s)B(\alpha)(1 - B(\alpha))^{-1} ,$$

$$E_\alpha = (1 - A(\alpha)G(\alpha))^{-1}(1 - A(\alpha))(h/\alpha + s)B(\alpha)(1 - B(\alpha))^{-1}.$$

G ist die LT der Verteilung $\tilde{G}$ für die Länge der Arbeitsphase. G ist bestimmt durch $G(\alpha) = B(\alpha + \lambda - \lambda G(\alpha))$ $(\alpha > 0)$. ◇

In diesem Paragraphen soll der folgende Satz bewiesen werden, der die Optimalität von Politiken aus F auch für das Durchschnittskostenkriterium behauptet.

Satz 13.3.

a) Sei $h > 0$. Dann existiert eine durchschnittsoptimale Politik aus F.

b) $h = 0$, $r = 0$, $R = 0$. Alle Politiken aus F sind optimal.

c) $h = 0$, $r > 0$, $R = 0$. Alle Politiken aus F_0 sind optimal, die aus F_{-1} sind suboptimal.

d) $h = 0$, $r = 0$, $R > 0$. Alle Politiken aus F_{-1} sind optimal, die aus F_0 sind suboptimal.

e) $h = 0$, $r > 0$, $R > 0$. Alle Politiken aus F sind suboptimal. Es existiert eine nicht-stationäre Politik R mit

$$\underline{\Phi}_{<m,j>}(R) = \bar{\Phi}_{<m,j>}(R) = \inf_{f \in F} \Phi_{<m,j>}(f) \qquad (<m,j> \in I).$$

In den Fällen a), c) und d) gilt: Ist α_n eine Nullfolge und $f_n \in F$ optimal bzgl. der mit α_n diskontierten Kosten, so gibt es ein $f \in F$ mit:

> Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n = f$, und f ist durchschnittsoptimal.

Die Durchschnittskosten für die Politiken aus F sind unabhängig vom Startpunkt und wie folgt gegeben:

$$(13.4)\quad \Phi(f_o^k) = (r - s/\mu)\rho + R\lambda(1-\rho)/k + h[(k-1)/2 + \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)}],$$

$$(13.4)\quad \Phi(f^k_{-1}) = r(1-\rho) + (r-s/\mu)\rho + h\left(\rho + \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)}\right) .$$

Dabei ist $\sigma^2 = \int_0^\infty \tilde{B}(dt)(t^2 - \mu^2)$ die Varianz der Bedienungszeitverteilung. ◇

Zum Beweis von Satz 13.3 werden die Ergebnisse aus §10 verwendet. Die Beschränktheitsvoraussetzungen (B) für die Kosten sind erfüllt, denn die Kostenraten sind ≥ 0 und die Sprungkosten $\geq -s$. Annahme (Ü) ist erfüllt, denn die Verteilung von S_1 unter $P^f_{<n,j>}$ ist gleich $\tilde{A}$ oder gleich $\tilde{B}$.

Für alle $f \in F$ besitzt die EMK nur eine rekurrente Klasse, und die Rekurrenzannahme (R) ist erfüllt. Das folgt mit Überlegungen der Warteschlangentheorie wegen $\rho < 1$.

Ähnlich wie in Schellhaas (79), Theorem (5.4) oder alternativ mit Hilfe von (13.2) und der Beziehung $\lim_{\alpha\to 0} \alpha\, V_\alpha(k) = \Phi(f^k_0)$, $\lim_{\alpha\to 0} \alpha\, W_\alpha(k) = \Phi(f^k_{-1})$ (Satz 5.15) zeigt man die Formeln (13.4).

Die Kompaktheitsannahme (K) gilt für F nicht. Würde man zur Kompaktifizierung von F die stationären Politiken hinzunehmen, die den Bediener niemals einschalten, so wäre die Rekurrenzannahme (R) nicht mehr erfüllt. Um Sätze aus §10 anwenden zu können, muß daher eine kompakte, d.h. endliche Teilmenge $\tilde{F}$ von F gefunden werden, die diskontiert-optimale Politiken für alle kleinen Diskontfaktoren enthält. Letzteres ist nötig, damit für $\tilde{F}$ Annahme (D) gilt. (Für F gilt sie nach Satz 13.1.) Hat man ein solches $\tilde{F}$ gefunden, so gelten die Stetigkeitsannahmen (S) und die Zusammenhangsannahmen (Z) automatisch.

Im folgenden wird bewiesen, daß eine Menge $\tilde{F}$ der beschriebenen Art existiert. Im Fall a) ist sie eine Teilmenge von F, im Fall c) von F_0, im Fall d) von F_{-1}. Zieht man die Darstellung (13.4) der Durchschnittskosten heran, so ist damit für die Fälle a), c), d) aufgrund von Satz 10.22 alles bewiesen. Fall b) ist trivial, Fall e) bedarf einer Sonderbehandlung.

Fall a): $h > 0$

Satz 13.5.

Es existiert ein $k^* \in \mathbb{N}$, sodaß für alle kleinen Diskontfaktoren $\alpha > 0$

$$\check{F} := \{f \in F \mid f = f_0^k \text{ oder } f = f_{-1}^k \text{ mit } k \leq k^*\}$$

eine durchschnittsoptimale Politik enthält.

Beweis:

In Langen (76), Satz 3.5 wird das optimale f_0^k (f_{-1}^k) aus $F_0(F_{-1})$ bestimmt. Das optimale k ergibt sich dabei als ganzzahliger Nachbar des Minimums der Funktionen

$$v_\alpha(x) := A(\alpha)^x(1 - A(\alpha)^x G(\alpha)^x)^{-1}(D_\alpha + G(\alpha)^x(R - D_\alpha)),$$
$$w_\alpha(x) := A(\alpha)^x D_\alpha + A(\alpha)^x G(\alpha)^x E_\alpha .$$

Diese Funktionen sind differenzierbar und besitzen auf $\mathbb{R}_+$ genau ein Minimum. Sie sind bis zum Minimum streng monoton fallend und ab dann streng monoton steigend. Ein k^* wie im Satz angegeben existiert folglich genau dann, wenn gilt

(13.6) $\exists x \in \mathbb{R}_+, \alpha_0 > 0 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0] \quad v'_\alpha(x) > 0$ und $w'_\alpha(x) > 0$.

Es ist (vgl. Langen (75), S. 43 und S. 45)

$$v'_\alpha(x) = A^x(1 - A^x G^x)^{-2}(RG^x \ln(AG) + D_\alpha(\ln A + A^x G^x \ln G) - G^x \ln(AG)),$$
$$w'_\alpha(x) = A^x(D_\alpha \ln A + E_\alpha G^x \ln(AG)).$$

Dabei wurde bei den Funktionen A und G das Argument α weggelassen. Eine leichte Umformung ergibt

$$\alpha v'_\alpha(x) = A^x G^x \frac{\alpha^2}{(1-A^x G^x)^2} \cdot \frac{\ln(AG)}{\alpha} \cdot R + A^x \frac{\alpha^2}{(1-A^x G^x)^2} (\alpha^2 D_\alpha) \cdot$$

$$\cdot [(1-G^x)\ln A - (1-A^x)\ln G + (1-G^x)(1-A^x)\ln G]/\alpha^3 .$$

Mit Hilfe von $\lim_{\alpha\to 0} \alpha^2 D_\alpha = -h/\mu$, $\int_0^\infty \tilde{A}(dt)\,t = 1/\lambda$, $\int_0^\infty \tilde{G}(dt)\,t = \mu/(1-\rho)$

(Cohen (69), (4.66), S. 251) und Lemma 13.7 erhält man daraus

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha\, v'_\alpha(x) = h/2 - R\lambda(1-\rho)/x^2 \ .$$

Dieser Ausdruck ist offenbar für große x größer als 0. Ähnlich erhält man

$$\lim_{\alpha\to 0} w'_\alpha(x) = h(x-1/2)/(\lambda(1-\rho)) - r/\lambda > 0$$

für große x. Daraus folgt nach (13.6) die Behauptung. ◇

Lemma 13.7.

Seien B und C LT's von $\mathbb{R}_+$-Zufallsvariablen mit endlichen Mittelwerten μ und ν. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$, wenn das Argument α von B und C gegen 0 geht:

$$B \to 1$$
$$B' \to -\mu$$
$$\ln B/\alpha \to -\mu$$
$$(1-B^x)/\alpha \to \mu x$$
$$[(1-B^x)\ln C - (1-C^x)\ln B]/\alpha^3 \to \mu\nu(\mu-\nu)x^2/2$$

Beweis:

Die ersten beiden Aussagen sind Standard (vgl. Hinderer (72), Satz 27.1). Die anderen folgen mit Hilfe der Regeln von L'Hospital. Für die letzte Aussage beweist man dabei zunächst

$$(1 - B^x + x \ln B)/\alpha^2 \to -\mu^2 x^2/2 \ . \ ◇$$

Fall c): $h = 0$, $r > 0$, $R = 0$

Satz 13.8.

Es existiert ein $k^* \in \mathbb{N}$, sodaß für alle kleinen Diskontfaktoren $\alpha > 0$

$$\tilde{F} := \{f \in F_0 \mid f = f_0^k \text{ für ein } k \geq k^*\}$$

eine durchschnittsoptimale Politik enthält.

Beweis:

Man berechnet leicht für $k \in \mathbb{N}$ (beachte: $h = 0$, also $\alpha D_\alpha \to r - s/\mu$):

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \to 0} \alpha V_\alpha(k) = \rho(r - s/\mu) + (1 - \rho)\lambda R/k , \\ &\lim_{\alpha \to 0} \alpha W_\alpha(k) = \rho(r - s/\mu) + (1 - \rho)r , \end{aligned} \tag{13.9}$$

siehe auch (13.4). Wegen $R = 0$ ist daher für kleine α eine diskontiert-optimale Politik in F_0 zu finden. Wie im Beweis von Satz 13.5 zeigt man

$$\lim_{\alpha \to 0} v'_\alpha(x)/\alpha = -(r - s/\mu)/2 > 0 . \diamond$$

Fall d): $h = 0$, $r = 0$, $R > 0$

Satz 13.10.

Es existiert ein $k^* \in \mathbb{N}$, sodaß für alle kleinen Diskontfaktoren $\alpha > 0$

$$\tilde{F} := \{f \in F_{-1} | f = f_{-1}^k \text{ für ein } k \leq k^*\}$$

eine durchschnittsoptimale Politik enthält.

Beweis:

Hier ist $r = 0$, nach (13.9) daher für kleine α eine α-optimale Politik in F_{-1} zu finden. Wie in den beiden vorigen Fällen zeigt man

$$\lim_{\alpha \to 0} w'_\alpha(x)/\alpha = -R_1/\lambda + s(x - 1/2)/(\lambda(1 - \rho)) > 0$$

für große x, denn $s/\mu > r = 0$. $\diamond$

Fall e): $h = 0$, $r > 0$, $R > 0$

In diesem Fall gilt

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha v'_\alpha(x) = -R\lambda(1 - \rho)/x^2 < 0,$$

$$\lim_{\alpha \to 0} w'_\alpha(x) = -r/\lambda < 0.$$

Die obere Kontrollgrenze einer α-optimalen Politik aus F geht daher mit $\alpha \to 0$ gegen ∞. In der Tat ist für kein $f^* \in F$ $\Phi^{f^*} = \inf\{\Phi^f | f \in F\} = (r - s/\mu)/\rho$, wie ein Blick auf die Formeln (13.4) zeigt. Die Politiken aus F sind also suboptimal.

Der Grund dafür läßt sich an der Formel (13.4) ablesen: Es ist günstig, Politiken aus F_0 zu verwenden, also bei Erreichen von $\langle 0,1\rangle$ den Bediener abzuschalten, weil andernfalls die Betriebskosten auch dann anfielen, wenn nicht bedient würde. Bei den Durchschnittskosten entstünde dann der Zusatzterm $r(1 - \rho) > 0$. Wegen der Umschaltkosten $R > 0$ sind andererseits die Kosten umso geringer, je später der Bediener eingeschaltet wird: Desto größer ist nämlich die Länge des Arbeitszyklus, und die Umschaltkosten fallen ja einmal pro Arbeitszyklus an. Die Länge der Warteschlange spielt wegen $h = 0$ keine Rolle.

Wir konstruieren jetzt eine Strategie R, die die Behauptung von Satz 13.3e erfüllt. Dazu sei R die Strategie, die zwischen dem k-ten und dem (k+1)-ten Besuch in $\langle 0,1\rangle$ f_0^k verwendet ($k \in \mathbb{N}_0$). (Beachte: $\langle 0,1\rangle$ ist rekurrent unter allen Strategien f_0^k). Diese Strategie schaltet also bei jedem Erreichen des Zustandes $\langle 0,1\rangle$ den Bediener ab und schiebt den Zeitpunkt des Wiedereinschaltens immer weiter hinaus.

Es ist klar, daß die Durchschnittskosten dieser Strategie unabhängig vom Startpunkt sind. Sie lassen sich wie folgt abschätzen. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Die erwarteten Kosten bis zum k-ten Besuch in $\langle 0,1\rangle$ sind endlich, denn unter f_0^k sind die Kosten zwischen zwei Besuchen in $\langle 0,1\rangle$ endlich. (Andernfalls wäre $\Phi(f_0^k) = \infty$). Die Kosten unter R bis zum k-ten Besuch in $\langle 0,1\rangle$ brauchen daher für die Durchschnittsbildung nicht berücksichtigt zu werden. Deshalb ist $\overline{\Phi}(R) \leq \overline{\Phi}(f_0^k) = (r - s/\mu)\rho + R\lambda(1 - \rho)/k$, und es folgt $\overline{\Phi}(R) \leq (r - s/\mu)\rho$. Damit ist alles bewiesen.◇

Es ist zu vermuten, daß die im Beweis konstruierte Strategie R sogar durchschnittsoptimal ist. Dazu braucht nur gezeigt zu werden,

daß für jede beliebige Strategie R gilt: $\overline{\Phi}_{<m,j>}(R) \geq (r - s/\mu)\rho$ ($<m,j> \in I$). Letzteres kann man sich folgendermaßen plausibel machen. Während der Bediener betrieben wird, fallen Kosten mit der negativen Rate $(r - s/\mu)$ an, andernfalls mit der Rate O. Der Anteil der Zeit, in der der Bediener betrieben wird, an der gesamten verstrichenen Zeit beträgt im Mittel höchstens ρ. Die durch die Kostenraten entstehenden Durchschnittskosten betragen daher mindestens $(r - s/\mu)\rho$. Hinzu kommen noch Kosten, die durch die Umschaltkosten $R \geq O$ entstehen. Daher gilt für alle Startpunkte $<m,j> \in I$: $\underline{\Phi}_{<m,j>}(R) \geq (r - s/\mu)\rho$.

§14 GI/M/c-Wartesystem mit Kundenzulassung

Wir betrachten ein Wartesystem mit Gruppenankunft und c Bedienern. Die Verteilung der Zwischenankunftszeiten ist auf $\mathbb{R}^+$ konzentriert und durch $\tilde{A}$ gegeben. Ihr Erwartungswert ist $\lambda := \int_0^\infty \tilde{A}(dt)t < \infty$, A ist die zugehörige LT. Die Größe einer ankommenden Gruppe von Kunden ist eine Zufallsvariable, deren Verteilung auf $\mathbb{N}$ konzentriert und durch eine Zähldichte $p: \mathbb{N} \to [0,1]$ gegeben ist. Die Bedienungszeiten von jedem der c Bediener sind exponentiell verteilt mit der gemeinsamen Rate $\mu \in \mathbb{R}^+$. Alle Zwischenankunftszeiten, Gruppengrößen und Bedienungszeiten bilden eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen.

Das System wird darüber gesteuert, daß bei jeder Gruppenankunft der Größe k der Anteil $a \in \{0,\ldots,k\}$ der Kunden bestimmt wird, die in die Warteschlange aufgenommen werden. Werden von k ankommenden Kunden a zugelassen, so fällt ein Gewinn der Größe $(a/k) \cdot R$ an, mit einer Konstanten $R > 0$. Wenn $i \in \mathbb{N}_0$ Kunden im System sind, akkumulieren Kosten gemäß einer Aufenthaltskostenrate h_i. Dabei ist $h: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$ monoton nicht-fallend und konvex.

Systeme dieser Art werden u.a. von Lippman und Stidham (77) und von Stidham (78) behandelt. Das hier beschriebene Modell untersucht Langen (79). Er beweist für das diskontierte Problem die Existenz von monotonen optimalen Politiken. Zu der Formulierung dieses Ergebnisses werden noch einige Bezeichnungen benötigt.

Jeder Zustand wird durch ein Paar $\langle i,k \rangle$ gekennzeichnet, wobei $i \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der bereits im System befindlichen Kunden und $k \in \mathbb{N}$ die Größe der gerade ankommenden Gruppe von Kunden ist. Weil Zustände $\langle i,k \rangle$ mit $p(k) = 0$ nicht auftreten können, setzen wir $I = \{\langle i,k \rangle \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \mid p(k) > 0\}$. Eine stationäre Politik ist eine Funktion $f: I \to \mathbb{N}_0$ mit $f(i,k) \leq k$ für alle $\langle i,k \rangle \in I$. Sie heißt monoton, wenn $f(.,k)$ monoton nicht-wachsend auf $\mathbb{N}_0$ ist $(k \in \mathbb{N})$.

Satz 14.1 (Langen (79), Korollar 11.9)

Für jeden Diskontfaktor $\alpha > 0$ gibt es eine monotone α-optimale Politik.◇

Dieses Ergebnis soll nun auf die Durchschnittskosten übertragen werden. Wir benötigen dazu die beiden folgenden Voraussetzungen.

$$(14.2)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(k)/\lambda < c\mu$$

$$(14.3)\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \, (p(k))^{1/k} < 1 \quad .$$

Bedingung (14.2) bedeutet anschaulich, daß die erwartete Anzahl der Ankünfte pro Zeiteinheit kleiner als die erwartete Zahl von Bedienungen pro Zeiteinheit ist. Das entspricht der in Wartesystemen üblichen Bedingung, daß die Verkehrsintensität kleiner als 1 ist. Die Annahme (14.3) hat technischen Charakter; sie wird für Lemma 14.5 benötigt und sagt aus, daß der Konvergenzradius der erzeugenden Funktion von (p(k)) größer als eins ist.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten

Sei jetzt F die Menge der monotonen Politiken. Um die Bedingungen aus §10 überprüfen zu können, müssen die Übergangswahrscheinlichkeiten explizit angegeben werden. Mit den Angaben von Schassberger (73), S. 108, (3.65) ist für alle $f \in F$, $\langle i,k\rangle \in I$, $\langle j,l\rangle \in I$, $t \geq 0$

$$(14.4)\qquad \begin{aligned} P^{f}_{\langle i,k\rangle}\{Y_1 = \langle j,l\rangle, S_1 \leq t\} &= Q^{f}_{\langle i,k\rangle,\langle j,l\rangle}(t) \\ &= p(l) \cdot \int_0^t \tilde{A}(du)\, \phi_{i+f(i,k),j}(u) \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\phi_{r,j}(u) := \begin{cases} 0 & r < j \\ \binom{r}{j} e^{-j\mu u}(1 - e^{-\mu u})^{r-j} & j \leq r \leq c \\ \binom{c}{j} e^{-j\mu u}\, c\mu \int_0^u dx\, \frac{(c\mu x)^{r-c-1}}{(r-c-1)!}(e^{-\mu x} - e^{-\mu u})^{c-j} & j \leq c < r \\ e^{-c\mu u}\, \frac{(c\mu u)^{r-j}}{(r-j)!} & c < j \leq r \end{cases}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zur Zeit u j Kunden im System sind, wenn zur Zeit O+ r Kunden im System sind und zwischenzeitlich keine neuen Kunden eintreffen. Es ist $\sum_{j=0}^{r} \phi_{r,j}(u) = 1 \quad (u \geq 0)$.

Offenbar ist $H^{f}_{<i,k>}(t) = \tilde{A}(t)$ $(f \in F, <i,k> \in I, t \geq 0)$. Die Bedingung (Ü) ist also erfüllt. Die Kompaktheitsannahme (K) gilt, weil die monotonen Politiken eine abgeschlossene Klasse innerhalb der stationären Politiken bilden. Die Stetigkeitsannahmen (S) sind leicht zu verifizieren. Annahme (D) folgt aus dem Ergebnis von Langen (79) (Satz 14.1). Es bleiben also die Annahmen (R) und (Z) zu überprüfen. Wir zeigen zunächst, daß die EMK selbst für die "langsamste" Politik $\bar{f} \in F$ positiv rekurrent ist. Dabei sei $\bar{f}$ definiert durch $\bar{f}(i,k) := k$ $(<i,k> \in I)$.

Positive Rekurrenz unter $\bar{f}$

Lemma 14.5.

Es existiert ein $y \in (0,1)$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} p(k) y^{-k} A(c\mu(1-y)) < 1$.

Beweis:

Aufgrund von (14.3) ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} p(k) x^k$ größer als 1. Daher existiert ein $y_o \in (0,1)$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} p(k) y^{-k} < \infty$ für $y \geq y_o$. Definiere

$$g(y) := \sum_{k=1}^{\infty} p(k) y^{-k} A(c\mu(1-y)) = \sum_{k=1}^{\infty} p(k) y^{-k} \int_0^{\infty} \tilde{A}(dt) e^{-c\mu(1-y)t}.$$

Die Funktion g ist stetig in $(y_o,1]$ und stetig differenzierbar in $(y_o,1)$ mit der Ableitung

$$g'(y) = -\sum_{k=1}^{\infty} k\, p(k) y^{-k-1} \int_0^{\infty} \tilde{A}(dt) e^{-c\mu(1-y)t}$$

$$+ c\mu \sum_{k=1}^{\infty} p(k) y^{-k} \int_0^{\infty} \tilde{A}(dt)\, t\, e^{-c\mu(1-y)t}.$$

Dabei darf die Differentiation $\frac{d}{dy}$ mit der Summe $\sum_{k=1}^{\infty}$ vertauscht werden, weil $\sum_{k=1}^{\infty} k\, p(k) y_o^{-k}$ endlich ist. (Aus (14.3) folgt nämlich $\overline{\lim}\, (k\, p(k))^{1/k} < 1$.) Wegen $\lim_{y \to 1} g'(y) = -\sum_{k=1}^{\infty} k\, p(k) + c\mu\lambda > 0$ ist g streng monoton steigend in einem Intervall $[y,1]$ mit $y \in (y_o,1)$.

Mit $g(1) = 1$ folgt daraus die Behauptung.◇

Lemma 14.6.

Unter $\bar{f}$ ist die EMK irreduzibel und positiv rekurrent.

Beweis:

Irreduzibilität ist klar. Nach Lemma 14.5 existieren $y \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ $(n > c)$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(k) y^{-k} A(c\mu(1-y)) \leq 1 - \varepsilon,$$

$$z := (\varepsilon y^{-n} - y^{-c+1} \sum_{k=1}^{\infty} p(k) y^{-k})^{-1} > 0 .$$

Definiere $z_{<i,k>} := z \cdot y^{-(i+k)}$. Mit $x := \sum_{k=1}^{\infty} p(k) y^{-k}$ gilt

$$\sum_{<j,l>\in I} p_{<i,k>,<j,l>}(\bar{f}) z_{<j,l>}$$

$$= zx \sum_{j=0}^{i+k} q_{<i,k>,j} y^{-j} < \infty \qquad (<i,k> \in I). \tag{14.7}$$

Dabei wurde $p_{<i,k>,<j,l>}(\bar{f}) = p(l) \cdot q_{<i,k>,j}$ gesetzt, siehe (14.4). Sei jetzt $<i,k> \in I$ mit $i+k \geq n \geq c$. Dann ist

$$\sum_{<j,l>\in I} p_{<i,k>,<j,l>}(\bar{f}) z_{<j,l>}$$

$$\leq zx\Big(\sum_{j=0}^{c-1} q_{<i,k>,j} y^{-c+1} + \sum_{j=c}^{i+k} q_{<i,k>,j} y^{-j}\Big)$$

$$\leq zx\Big(y^{-c+1} + \sum_{j=c}^{i+k} \int_0^{\infty} \tilde{A}(dt) e^{-c\mu t} \frac{(c\mu t)^{i+k-j}}{(i+k-j)!} y^{-j}\Big)$$

$$\leq zx\big(y^{-c+1} + A(c\mu(1-y)) y^{-(i+k)}\big)$$

$$\leq z\big(xy^{-c+1} + (1-\varepsilon) y^{-(i+k)}\big)$$

$$\leq zy^{-(i+k)} + z\big(xy^{-c+1} - \varepsilon y^{-n}\big)$$

$$= z_{<i,k>} - 1 .$$

Das zeigt zusammen mit (14.7), daß die EMK ein Foster-Kriterium erfüllt, siehe etwa Cohen (69), S. 25, (ii). Daher ist die EMK

positiv rekurrent.◇

Die Zusammenhangsbedingung (Z)

Zum Nachweis der Zusammenhangsbedingung reicht es nach Satz 6.31 und Satz 7.13, die folgenden Bedingungen zu zeigen. Dabei sei $Y_n = (I_n, K_n)$.

(14.8) $P^{\bar{f}}_{\langle i,k\rangle}\{I_1 \le j,\ K_1 = l\} \le P^{f}_{\langle i,k\rangle}\{I_1 \le j, K_1 = l\}$ für alle $f \in F$, $\langle i,k\rangle, \langle j,l\rangle \in I$

(14.9) $P^{\bar{f}}_{\langle i,k\rangle}\{I_1 \le j,\ K_1 = l\}$ ist nicht-steigend in i und in k, für alle $\langle j,l\rangle \in I$

(14.10) $\nu(\bar{f}) < \infty$, und für $\bar{f}$ ist die EMK nicht-dissipativ.

Die letzte Aussage (14.10) wurde in Lemma 14.6 bewiesen. Bedingung (14.8) folgt aus (14.9), denn $P^{f}_{\langle i,k\rangle}\{I_1 \le j,\ K_1 = l\} = P^{\bar{f}}_{\langle i,f(i,k)\rangle}\{I_1 \le j,\ K_1 = l\}$ und $f(i,k) \le k$. Wir beweisen (14.9).

Lemma 14.11.

Es gilt (14.9).

Beweis:

Entsprechend der Definition (14.4) von $p_{\langle i,k\rangle,\langle j,l\rangle}(\bar{f})$ sind mehrere Fälle zu unterscheiden. Es sei $P^{\bar{f}}_{\langle i,k\rangle}\{I_1 \le j,\ K_1 = l\} =: p(l) \cdot g(i+k)$ (j fest), $n := i + k$.

a) $j \ge c-1$

$$g(n) = 1 - \int_0^\infty \tilde{A}(dt) e^{-c\mu t} \sum_{r=0}^{n-j-1} (c\mu t)^r/r! \quad \text{ist fallend in n.}$$

b) $j \le c-1,\ n \le c$

O.B.d.A. ist $j \le n$, denn sonst ist $g(n) = g(n+1) = 1$. Es ist

$$g(n) = 1 - \sum_{r=0}^{n-j-1} \int_0^\infty \tilde{A}(dt) \binom{n}{r} e^{-(n-r)\mu t}(1 - e^{-\mu t})^r \text{ , also}$$

$$g(n+1) - g(n) = \sum_{r=0}^{n-j-1} \binom{n}{r} \int_0^\infty \tilde{A}(dt) e^{-(n-r)\mu t}(1 - e^{-\mu t})^r$$

$$- \sum_{r=0}^{n-j} \binom{n+1}{r} \int_0^\infty \tilde{A}(dt) e^{-(n-r+1)\mu t} (1 - e^{-\mu t})^r$$

(und weiter mit $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$:)

$$= \sum_{r=0}^{n-j-1} \binom{n}{r} \int_0^\infty \tilde{A}(dt) e^{-(n-r)\mu t} (1 - e^{-\mu t})^r \cdot \{1 - e^{-\mu t}\}$$

$$- \sum_{r=1}^{n-j} \binom{n}{r-1} \int_0^\infty \tilde{A}(dt) e^{-(n-r+1)\mu t} (1 - e^{-\mu t})^r$$

$$- \binom{n}{n-j} \int_0^\infty \tilde{A}(dt) e^{-(j+1)\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{n-j}$$

$$= -\binom{n}{n-j} \int_0^\infty \tilde{A}(dt) e^{-(j+1)\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{n-j}$$

$$\leq 0$$

c) $j < c-1$, $n > c$

$$g(n) = c\mu \int_0^\infty \tilde{A}(dt) \sum_{r=0}^{j} \binom{c}{r} e^{-r\mu t} \int_0^t dx \frac{(c\mu x)^{n-c-1}}{(n-c-1)!} (e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r}$$

Mit partieller Integration hat man

$$\int_0^t dx \frac{(c\mu x)^{n-c-1}}{(n-c-1)!} (e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r}$$

$$= \frac{c-r}{c} \int_0^t dx \frac{(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} (e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r-1} e^{-\mu x}.$$

Dies und $\frac{c-r}{c} \binom{c}{r} = \binom{c-1}{r}$ ergibt

$$g(n+1) - g(n) = c\mu \int_0^\infty \tilde{A}(dt) \sum_{r=0}^{j} \binom{c}{r} e^{-r\mu t} \{ \int_0^t dx \frac{(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} (e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r}$$

$$- \int_0^t dx \frac{(c\mu x)^{n-c-1}}{(n-c-1)!} (e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r} \}$$

$$= c\mu \int_0^\infty \tilde{A}(dt) \int_0^t dx \frac{(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} \sum_{r=0}^{j} (e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r-1} e^{-r\mu t} \cdot$$

$$\cdot \{ -\binom{c-1}{r} e^{-\mu t} + \binom{c-1}{r-1} (e^{-\mu x} - e^{-\mu t}) \}$$

$$= -c\mu \int_0^\infty \tilde{A}(dt) \int_0^t dx \frac{(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} \binom{c-1}{j} e^{-(j+1)\mu t} (e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-j-1}$$

$$\leq 0$$

d) $j < c-1,\ n = c$

$$g(n) = \sum_{r=0}^{j} \binom{c}{r} \int_0^\infty \tilde{A}(dt) e^{-r\mu t}(1 - e^{-\mu t})^{c-r}$$

$$= c\mu \sum_{r=0}^{j} \binom{c-1}{r} \int_0^\infty \tilde{A}(dt) e^{-r\mu t} \int_0^t dx\, e^{-\mu x}(1 - e^{-\mu x})^{c-r-1}$$

$$g(n+1) - g(n) = c\mu \int_0^\infty \tilde{A}(dt) \sum_{r=0}^{j} e^{-r\mu t}\{\binom{c}{r}(e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r}$$

$$- \binom{c-1}{r} e^{-\mu x}(1 - e^{-\mu x})^{c-r-1}\}$$

$$= c\mu \int_0^\infty \tilde{A}(dt) \int_0^t dx\{ \sum_{r=0}^{j} \binom{c-1}{r} e^{-r\mu t}((e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r}$$

$$- e^{-\mu x}(1-e^{-\mu x})^{c-r-1}) + \sum_{r=1}^{j} \binom{c-1}{r-1} e^{-r\mu t}(e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r}\}$$

$$= c\mu \int_0^\infty \tilde{A}(dt) \int_0^t dx\{ \sum_{r=0}^{j} \binom{c-1}{r} e^{-r\mu t}[(e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r}$$

$$- e^{-\mu x}(1 - e^{-\mu x})^{c-r-1} + e^{-\mu t}(e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r-1}]$$

$$- \binom{c-1}{j} e^{-(j+1)\mu t}(e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-j-1}\}$$

$$\leq 0$$

denn der Ausdruck in [...] ist gleich

$$e^{-\mu x}((e^{-\mu x} - e^{-\mu t})^{c-r-1} - (1 - e^{-\mu x})^{c-r-1}) \leq 0. \diamond$$

Nach Satz 7.13 hat man jetzt also die Stetigkeit von $\pi_{ij}(.)$ $(i,j \in I)$ und daher die Gültigkeit der Zusammenhangsbedingung (Z) (Satz 6.31). Satz 7.13 liefert aber auch noch das folgende Resultat.

Korollar 14.12.

Für alle $f \in F$ ist die EMK nicht-dissipativ, und es existiert eine endliche Menge K mit $f^*(\langle i,k\rangle,K)(f) = 1$ $(f \in F,\ \langle i,k\rangle \in I)$. $\diamond$

Die Rekurrenzbedingung (R)

Sei $f \in F$ fest. Da die Übergangszeiten nicht vom Zustand abhängen, gilt

(14.13) $\mu_{<i,k>,J}(f)' = \lambda\, m_{<i,k>,J}(f) \qquad (<i,k> \in I,\ J \subset I)$

mit der endlichen Konstanten λ (vgl. (2.19)). Insbesondere haben wir $D_+(f) \subset \dot{D}_+(f)$. Definiere $K' := K \cap D_+(f)$, wobei K eine endliche Menge wie in Korollar 14.12 ist. Aus diesem Korollar folgt $f^*(<i,k>,K')(f) = 1$ für alle $<i,k> \in I$. Zum Nachweis von (R) ist also nur noch zu zeigen, daß $E^f_{<i,k>} K_{abs}(T_{K'}) < \infty$ $(<i,k> \in I \setminus D_+(f))$. Wir verteilen den Beweis auf drei Lemmata.

Lemma 14.14.

Es gilt $D(f) = \{<i,k> \in I \mid 0 \leq i < i_o + 1\}$ für ein $i_o \in \mathbb{N}_o \cup \{\infty\}$. Ist i_o endlich, so gilt für alle $<i,k> \in I$: $i + f(i,k) \leq i \vee i_o$.

Beweis:

Aus Korollar 14.12 folgt $D(f) \neq \emptyset$. Die erste Behauptung wird daher von der Aussage impliziert:

$$\forall <i,k> \in D(f),\ <j,l> \in I,\ j \leq i \qquad <j,l> \in D(f).$$

Das gilt wegen $<i,k> \rightsquigarrow <j,l>$ für $j \leq i$. Man hat sogar $<i,k> \rightsquigarrow <j,l>$ für $j \leq i + f(i,k)$. Daraus folgt die zweite Behauptung, unter Verwendung der Monotonie von f.◇

Lemma 14.15.

Ist i_o endlich, so existiert ein $M < \infty$ mit $m_{<i,k>,K'}(f) \leq M$ für alle $<i,k> \in D(f)$.

Beweis:

Nach Definition der Übergangswahrscheinlichkeiten hängt die Funktion $<i,k> \to m_{<i,k>,K'}(f)$ nur von $i + f(i,k)$ ab. Dieser Ausdruck ist für $<i,k> \in D(f)$ kleiner oder gleich i_o (Lemma 14.14), sodaß jene Funktion nur endlich viele Werte auf D(f) annimmt. Diese sind endlich (Korollar 2.21), weil D(f) positiv rekurrent ist (Korollar 14.12).◇

Lemma 14.16.

Es gilt die Rekurrenzbedingung (R).

Beweis:

Sei $\langle i,k\rangle \in I \setminus D_+(f)$. Dann ist i_o endlich. Bei Start in $\langle i,k\rangle$ ist die Kostenrate durch h_i beschränkt, denn nach Lemma 14.14 werden von $\langle i,k\rangle$ aus nur Zustände $\langle j,l\rangle$ mit $j \leq i$ erreicht. Daher gilt $E^f_{\langle i,k\rangle} K_{abs}(T_{K'}) \leq Rm_{\langle i,k\rangle,K'}(f) + h_i \mu_{\langle i,k\rangle,K'}(f)$. Wegen (14.13) braucht also nur noch die Endlichkeit von $m_{\langle i,k\rangle,K'}(f)$ gezeigt zu werden. Offenbar ist $m_{\langle i,k\rangle,K'}(f) \leq M + m_{\langle i,k\rangle,D(f)}(f)$, mit der Konstante M aus Lemma 14.15. Erneute Verwendung von Lemma 14.14 und die Definition der Übergangswahrscheinlichkeiten liefert jetzt die Behauptung.◇

Existenz einer monotonen durchschnittsoptimalen Politik

Die Überlegungen auf den vorigen Seiten haben gezeigt, daß das GI/M/c-Modell alle Voraussetzungen von §10 erfüllt. Aus Satz 10.22 folgt daher

Satz 14.17.

Es existiert eine monotone durchschnittsoptimale Politik. Ist $f_n \in F$ α_n-optimal und gilt $\lim \alpha_n = 0$, so ist jeder Häufungspunkt der f_n eine solche optimale Politik.◇

Anhang

Hier werden einige häufig benutzte Konvergenzsätze und Sätze über Markoffketten bereitgestellt.

Satz A.1 (Royden (68), Prop. 11.18)

Sei (X,A) ein Meßraum; μ_n, μ Maße auf A $(n \in \mathbb{N})$; f_n, f, g_n, g reellwertige meßbare Funktionen auf X. Es gelte $\mu_n(B) \to \mu(B)$ $(B \in A)$, $f_n(x) \to f(x)$, $g_n(x) \to g(x)$, $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ $(x \in X)$ und $\int g_n \, d\mu_n \to \int g \, d\mu < \infty$. Dann gilt

$$\int f_n \, d\mu_n \to \int f \, d\mu. \diamond$$

Satz A.1 ist eine Verallgemeinerung des Satzes von der majorisierten Konvergenz (Hinderer (72), Satz 19.6). Für einen abzählbaren Raum haben wir die folgenden Korollare (vgl. Hordijk (74), Lemma 4.12 und Scheffé (47)).

Korollar A.2.

Sei I abzählbar; a_n, b_n, a, b reellwertige Funktionen auf I mit $|b_n(i)| \leq a_n(i)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $a_n(i) \to a(i)$, $b_n(i) \to b(i)$ $(i \in I)$, $\sum_i a_n(i) \to \sum_i a(i) < \infty$. Dann gilt

$$\sum_i b_n(i) \to \sum_i b(i) \; . \diamond$$

Korollar A.3

Sei I abzählbar, p_n, p Zähldichten auf I, u_n, u reellwertige Funktionen auf I $(n \in \mathbb{N})$ mit $p_n(i) \to p(i)$, $u_n(i) \to u(i)$ $(i \in I)$ und $\sup\{u_n(i) \mid i \in I, n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Dann gilt

$$\sum_i p_n(i) u_n(i) \to \sum_i p(i) u(i) \; . \diamond$$

Satz A.4 (Satz von Dini, Dieudonné (69), Satz 7.2.2)

Sei F ein kompakter topologischer Raum, h_n eine Folge reellwertiger, stetiger Funktionen auf F, die monoton steigend gegen eine stetige Funktion h konvergiert. Dann ist die Konvergenz gleichmäßig auf F. $\diamond$

Im folgenden gelten für eine Markoffkette (p_{ij}) die Bezeichnungen, die nach Korollar 2.14 eingeführt wurden.

(A.5) $${}_K p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{h \notin K} {}_K p_{ih}^{(n)} \; {}_K p_{hj}^{(m)} \qquad (i,j \in I,\ m,n \in \mathbb{N},\ K \subset I)$$

(A.6) $$\pi_{ij} = f_{ij}^* / m_{jj} \qquad (i,j \in I)$$

(A.7) $$m_{ii} = \sum_{j \in I} e_{ij} \qquad (i \in I)$$

(A.8) $$p_{ij}^{(n)} \to 0 \qquad (i \in I,\ j \in I \setminus D)$$

(A.9) $$i \rightsquigarrow j \Rightarrow e_{ij} > 0,\ e_{ji} < \infty,\ {}_j p_{ii}^* < \infty \qquad (i,j \in I)$$

(A.10) $$e_{ij}\, e_{jh} = e_{ih} \qquad (i \in D, j \in D_i, h \in I)$$

Beweis:

(A.5) ist die "Halbgruppeneigenschaft", siehe Chung (60), §9. Zu (A.7): $m_{ii} = E_i\, \tau_{i1} = E_i \sum_j \nu_j(\tau_{i1}) = \sum_j e_{ij}$. (A.6) und (A.8)-(A.10) folgen aus Chung (60), Corollary zu Theorem I.6.4, Theorem I.6.4, Theorem I.9.3 und Corollary 1 zu Theorem I.9.5.◇

Lemma A.11 (Chung (60), Th. I.9.7)

Sei $h \in D$. Die einzigen nicht-negativen Lösungen $\{c_i \mid i \in D_h\}$ des Gleichungssystems

$$c_j = \sum_{i \in D_h} c_i p_{ij} \qquad (j \in D_h)$$

sind gegeben durch $c_i = d\, e_{hi}$, wobei d eine nicht-negative Konstante ist.◇

Lemma A.12.

Die Markoffkette sei nicht-dissipativ, und $\{\psi_i \mid i \in I\}$ sei eine beschränkte Lösung des Gleichungssystems

$$\psi_i = \sum_j p_{ij}\, \psi_j \qquad (i \in I).$$

Dann ist ψ_i auf jeder rekurrenten Klasse unabhängig von i; es sei $\psi_\alpha := \psi_i$ für $i \in D_\alpha$. Es gilt

$$\psi_i = \sum_\alpha f^*(i,D_\alpha)\psi_\alpha \qquad (i \in I).$$

Beweis:

Aus Chung (60), Th. I.17.5 folgt die Existenz einer "invarianten" Funktion $\tilde{\psi}$ mit $\psi_i = E_i\tilde{\psi}$ $(i \in I)$. "Invariant" bedeutet in der Terminologie der θ-Operatoren: $\theta_n\tilde{\psi} = \tilde{\psi}$ $(n \in \mathbb{N})$. Mit Satz 2.11 gilt daher für $i \in D$, $j \in D_i$

$$\psi_i = E_i\tilde{\psi} = E_i[E_i[\theta_{\tau_{j1}}\tilde{\psi}|\sigma_{\tau_{j1}}]] = E_j\tilde{\psi} = \psi_j .$$

Analog hat man für beliebiges $i \in I$

$$\psi_i = E_i\psi_{Y_{\tau_{D1}}} = \sum_\alpha f^*(i,D_\alpha)\psi_\alpha \ .\diamond$$

Im folgenden sollen die p_{ij} stetig von einem Parameter $f \in F$ abhängen. Dabei ist F ein beliebiger topologischer Raum. Lemma A.14 ist eine Verallgemeinerung von Theorem 1(b) in Federgruen et al. (79).

Lemma A.13.

Die Funktion $f \to {}_Kp_{ij}^{(n)}(f)$ ist stetig $(i,j \in I,\ K \subset I,\ n \in \mathbb{N})$.

Beweis:

Per Induktion mit Korollar A.3 und (A.5).$\diamond$

Lemma A.14.

Für $i,j \in I$, $K \subset I$, $f_o \in F$ gilt:

a) Die Funktionen ${}_Kp_{ij}^*(.)$, $f_{ij}^*(.)$, $f^*(i,K)(.)$ und $e_{ij}(.)$ sind unterhalb stetig;

b) Ist $f^*(i,K)(f_o) = 1$ und gilt $j \in K$ oder $f^*(j,K)(f_o) = 1$, so ist ${}_Kp_{ij}^*(.)$ im Punkt f_o endlich und stetig;

c) $i \in D(f_o)$, $f_{ji}^*(f_o) = 1 \Rightarrow e_{ij}(.)$ ist in f_o stetig;

d) $e_{ij}(.)$ stetig, $i \in K \Rightarrow {}_Kp_{ij}^*(.)$ stetig.

Beweis:

a) folgt aus Lemma A.13 mit dem Lemma von Fatou. Dabei beachte $f^*(i,K) = \sum_{j\in K} {}_K p^*_{ij}$ und $e_{ij} = {}_i p^*_{ij}$.

b) Wegen Lemma A.13 ist ${}_K p^*_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_K p^{(n)}_{ij}$ genau dann in f_o stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Umgebung $U(f_o)$ existieren mit

$$\text{(A.15)} \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} {}_K p^{(n)}_{ij}(f) \le \varepsilon \qquad (f \in U(f_o)) .$$

Sei zunächst $j \in K$. Dann ist $\sum_{n=N+1}^{\infty} {}_K p^{(n)}_{ij}(f) \le P_i^f\{\tau_{K1} > N\}$ $= \sum_{h\notin K} {}_K p^{(N)}_{ih}(f)$. Der letzte Ausdruck ist stetig nach Lemma A.13 und Korollar A.2. Wegen $f^*(i,K)(f_o) = P_i^{f_o}\{\tau_{K1} < \infty\} = 1$ kann man zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ wählen mit $P_i^{f_o}\{\tau_{K1} > N\} \le \frac{\varepsilon}{2}$. Auf einer Umgebung $U(f_o)$ gilt dann (A.15).

Ist $j \notin K$, so ist ${}_{j,K}p^*_{jj}(f_o) < 1$ wegen $f^*(j,K)(f_o) = 1$, und ${}_{j,K}p^*_{ij}(.)$ und ${}_{j,K}p^*_{jj}(.)$ sind nach dem Vorangehenden stetig in f_o. Nach Chung (67), Formel (I.9.4) gilt

$$ {}_K p^*_{ij} = {}_{j,K}p^*_{ij}/(1 - {}_{j,K}p^*_{jj}) .$$

Das beweist die Stetigkeit von ${}_K p^*_{ij}(.)$ in f_o.

c) ist ein Spezialfall von b).

d) gilt, weil (A.15) aus der entsprechenden Beziehung für $e_{ij} = {}_i p^*_{ij}$ folgt; denn $\sum_{n=N+1}^{\infty} {}_K p^{(n)}_{ij}(f) \le \sum_{n=N+1}^{\infty} {}_i p^{(n)}_{ij}(f)$. ◇

Symbole

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^+, \overline{\mathbb{R}}$ Menge der natürlichen, nicht-negativen ganzen, ganzen, rationalen, positiven rationalen, reellen, nicht-negativen reellen, positiven reellen, erweitert reellen Zahlen

δ_{ij} Kronecker-Symbol

$0 \cdot \infty := 0$, $0/0 := 0$, $a/0 := \infty$ für $a > 0$

$a^+ := \max(0,a)$, $a^- := \max(0,-a)$

$a \wedge b := \min(a,b)$, $a \vee b := \max(a,b)$

$a_n \to a$, $a_n \downarrow a$, $a_n \uparrow a$ (absteigender, aufsteigender) Limes

$X_{t-} := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} X_{t-\varepsilon}$

$\| \cdot \|$ Supremumsnorm von Funktionen

$i \rightsquigarrow j$ siehe S. 30

$\mathfrak{P}$ Potenzmenge

$\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^1_+$ Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_+$

$\otimes$ Produkt von σ-Algebren

$\sigma(\ldots)$ von $(\ldots)$ erzeugte σ-Algebra

$P^{(X)}$ Verteilung der Zufallsvariablen X

$[P]$ P-fast überall

$[\ldots]$ Indikatorfunktion der Menge $\{\ldots\}$

$E[\ldots,X] := E([\ldots] \cdot X)$

$E[f(X(.),Y)]$ siehe S. 25

$\int_a^b$, $\int_{a+}^b$, $\int_a^{b-}$ Integral über $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$

$\inf \emptyset := \infty$

A	84, 120, 129	E_i, E_μ	27	F_0	120	K_n	133
A(i)	84	E_i^R	87	F_{-1}	121	$M_{ij}(t)$	30
$\tilde{A}$	120 129	$E_{\pi,i}$	47	G,$\tilde{G}$	122	$M_{ij}^{(\alpha)}(t)$	51
B,$\tilde{B}$	120	E_α	122	$H_i(t)$	24	$N_j(t)$	18
D,D_i	31	F	63, 85,	I	15, 84	P_i	15
$\tilde{D}_+$,D_+	31		121, 130	I_n	133	P_i^R	86, 94
D(f)	63	$\tilde{F}$	123	K(t)	46	P_i^a	86
D_α	31, 122	$F_{ij}^a(t)$	89	$K_{abs}(t)$	52		

p_i^f 63
$\tilde{p}_{(i,a)}$ 84
p_μ 25
p_π 45
$p_{\pi,i}$ 47
$p_{\pi,i}^f$ 63
$p_{\pi,\alpha}$ 48
$^op_{,i}, ^op$ 45
$Q_{ij}(t)$ 29
$Q_{ij}^f(t)$ 63
$Q_{ij}^{(\alpha)}(t)$ 51
R 85, 94, 122, 129
R_1, R_2 121
S_n 15, 84, 92
S_∞ 15
$\tilde{S}$ 84
T_K 52
T_{Kn}, T_{jn} 18
U_t 15, 93
V_t 16
$V_{i,\alpha}$ 47
$V_{i,\alpha}^*$ 87
$V_\alpha(k)$ 121
$V_{i,\alpha}(R)$ 87
$W_\alpha(k)$ 121
X 20
X_t 16, 85
$\bar{X}_t, \bar{\bar{X}}_t$ 85
Y_n 15, 84, 92
Y_∞ 16
$\tilde{Y}$ 84
Z_t 15, 84, 93
$\tilde{Z}_t$ 84
c 46,84f,129
c_t 20
d 46,84f
$\bar{d}$ 47
e_{ij} 29
f_l^k 120
f_{ij}^* 29
f(i,k) 129
f*(i,K) 29
$\bar{f}$ 131
h 121
h_i 129
<i,k> 129
m_{iK}, m_{ij} 29
<m,j> 120
n(t) 15,93
p(k) 129
p_n 92
p_{ij} 29
$p_{ij}(a)$ 86
$p_{ij}(f)$ 63
$^K p_{ij}^{(n)}, ^K p_{ij}^*$ 29
r 121
s 121
v_α 47
Δ 16
Δ_n 85, 92
Π 85, 94
Π_{sm} 97
Π' 89
Φ 20
$\Phi_i, \underline{\Phi}_i, \bar{\Phi}_i$ 47
Φ_i^* 77
$\underline{\Phi}_i(R), \bar{\Phi}_i(R)$ 87
$\bar{\Phi}_i^*$ 87
Φ_α 48
Ψ_i 58
$\bar{\Psi}_i(R)$ 113
$\underline{\Psi}_i(R)$ 117
Ω 15,84,92
$\tilde{\Omega}$ 84
$\hat{\Omega}$ 92
Ω^t 21
Ω_τ 19
α_o 88
β_α 89
δ 88
η_i 30
$\eta_i(a)$ 86
$\eta_i(f)$ 63
θ^t 20,22
θ_n, θ_τ 22
λ 120,129
λ_i 24
μ 120,129
μ_{iK}, μ_{ij} 30
$\mu_{ij}(f)$ 63
$\mu(i,x)$ 25
ν 31
$\nu(f)$ 63
$\nu_K(n)$ 18
$\nu_j(n)$ 18
π_h 39
π_{ij} 29
ρ 120
ρ_i 45
$\rho(j), \rho_\alpha(j)$ 48
σ^2 123
σ_n 16,85
σ_τ 27
τ 19
τ_K 52
τ_{Kn}, τ_{jn} 18
$\phi_{r,j}(u)$ 130
χ_n 89
$\underline{\chi}_i(R)$ 87
$\bar{\chi}_i(R)$ 87
ψ_o 20
$\psi_i(\alpha,f)$ 103
A 16,84,92
$\hat{A}$ 15
A^* 20
$\tilde{A}$ 84
A_T 85
$\bar{A}_{S_n}, \bar{\bar{A}}_{S_n}$ 85
A_t 16
$\mathfrak{b}$ 16
$\mathfrak{C}$ 15,84
$\mathfrak{F}$ 84
$\mathfrak{H}_n$ 85
$\mathfrak{K}$ 16
$\mathfrak{z}$ 15,84

Literaturverzeichnis.

BATHER, J.A. (1973): Optimal decision procedures for finite Markov chains. Part II: Communicating systems. Adv. Appl. Prob. 5, 521-540.

BAUER, H. (1974): Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie (2., erw. Aufl.). De Gruyter, Berlin.

BELL, C. (1971): Characterization and computation of optimal policies for operating an M/G/1 queuing system with removable server. Opns. Res. 19, 208-218.

CHUNG, K.L. (1967): Markov chains with stationary transition probabilities (2nd ed.), Springer, Berlin.

CINLAR, E. (1969): Markov renewal theory. Adv. Appl. Prob. 1, 123-187.

CINLAR, E. (1975): Introduction to stochastic processes. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

COHEN, J.W. (1969): The single server queue. North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

DALEY, D.J und VERE-JONES, D. (1972): A summary of the theory of point processes. In: Lewis, P.A.W. (ed.), Stochastic point processes: Statistical analysis, theory and applications. Wiley, New York, 299-383.

DERMAN, C. (1966): Denumerable state Markovian decision processes - average cost criterion. Ann. Math. Statist. 37, 1545-1554.

DIEUDONNÉ, J. (1969): Foundations of modern analysis (enlarged and corrected printing). Academic Press, New York.

DYNKIN, E.B. (1965): Markov processes, vol. I. Springer, Berlin.

FEDERGRUEN, A., HORDIJK, A. und TIJMS, H.C. (1978a): Recurrence conditions in denumerable state Markov decision processes. In: Puterman, M.L. (ed.), Dynamic programming and its applications. Academic Press, New York, 3-22.

FEDERGRUEN, A., HORDIJK, A. und TIJMS, H.C. (1978b): A note on simultaneous recurrence conditions on a set of denumberable stochastic matrices. J. Appl. Prob. 15, 842-847.

FEDERGRUEN, A., HORDIJK, A. und TIJMS, H.C. (1979): Denumerable state semi-Markov decision processes with unbounded costs. Average cost criterion. Stoch. Proc. Appl. 9, 223-235.

FEDERGRUEN, A. und TIJMS, H.C. (1978): The optimality equation in average cost denumerable state semi-Markov decision problems, recurrency and algorithms. J. Appl. Prob. 15, 356-373.

FISHER, L. und ROSS, S.M. (1968): An example in denumerable decision processes. Ann. Math. Statist. 39, 674-675.

FRANKEN, P. (1980): On the point process approach in queuing theory and related topics. Abstract des Vortrages auf dem Symposium on Queueing Theory and Related Topics, Karpacz, Polen.

HEYMAN, D. (1968): Optimal operating policies for M/G/1 queuing systems. Opns. Res. 16, 362-382.

HINDERER, K. (1970): Foundations of non-stationary dynamic programming with discrete time parameter. Lecture notes in Operations Research and Mathematical Economies 33. Springer, Berlin.

HINDERER, K. (1972): Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer, Berlin.

HORDIJK, A. (1971): A sufficient condition for the existence of an optimal policy with respect to the average cost criterion in Markovian decision processes. In: Transactions of the Sixth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Prag 1973, 263-274.

HORDIJK, A. (1974): Dynamic programming and Markov potential theory. Mathematical Centre Tracts 51, Amsterdam.

KÖNIG, D. und MATTHES, K. (1963): Verallgemeinerungen der Erlangschen Formeln, I. Math. Nachr. 26, 45-56.

LANGEN, H.-J. (1975): Optimierung von M/G/1-Wartesystemen mit schaltbarem Bediener und Umschaltkosten. Diplomarbeit, Universität Bonn.

LANGEN, H.-J. (1976): Optimierung von M/G/1-Wartesystemen mit schaltbarem Bediener. Opns. Res. Verf. 25, 387-400.

LANGEN, H.-J. (1979): Approximation dynamischer Entscheidungsmodelle und die Phasenmethode bei der Optimierung von Wartesystemen. Dissertation, Universität Bonn.

LIPPMAN, St.A. und STIDHAM, Sh. (1977): Individual versus social optimization in exponential congestion systems. Opns. Res. 25, 233-247.

MATTHES, K. (1963): Stationäre zufällige Punktfolgen, I. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 66, 66-79.

McDONALD, D.R. (1977): Equilibrium measures for semi-Markov processes. Ann. Prob. 5, 818-822.

PRABHU, N.U. (1965): Stochastic processes. MacMillan, New York.

PYKE, R. (1961a): Markov renewal processes: Definitions and preliminary properties. Ann. Math. Statist. 32, 1231-1242.

PYKE, R. (1961b): Markov renewal processes with finitely many states. Ann. Math. Statist. 32, 1243-1259.

PYKE, R. und SCHAUFELE, R. (1964): Limit theorems for Markov renewal processes. Ann. Math. Statist. 35, 1746-1764.

PYKE, R. und SCHAUFELE, R. (1966): The existence and uniqueness of stationary measures for Markov renewal processes. Ann. Math. Statist. 37, 1439-1462.

RIEDER, U. (1975): On dynamic programming with unbounded reward functions. Report, Universität Hamburg.

RIEDER, U. (1979): On non-discounted dynamic programming with arbitrary state space. Report, Universität Karlsruhe.

ROSS, Sh. M. (1968): Arbitrary state Markovian decision processes. Ann. Math. Stat. 39, 2118-2122.

ROSS, Sh. M. (1970): Applied probability models with optimization applications. Holden-Day, San Francisco.

ROYDEN, H.L. (1968): Real analysis (2nd ed.). MacMillan, New York.

SCHASSBERGER, R. (1973): Warteschlangen. Springer, Wien.

SCHÄL, M. (1969): Markoffsche Erneuerungsprozesse mit Hilfspfaden. Dissertation, Universität Hamburg.

SCHÄL, M. (1970): Markov renewal processes with auxiliary paths. Ann. Math. Statist. 41, 1604-1623.

SCHÄL, M. (1975): Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n-stage optimal policies to be optimal. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 32, 179-196.

SCHÄL, M. (1977a): On negative dynamic programming with irreducible Markov chains and the average cost criterion. Bonner Mathematische Schriften 98, 93-97.

SCHÄL, M. (1977b): On the M/G/1-queue with controlled service rate. Proceedings of the Workshop: Optimization and Operations Research, Universität Bonn, 233-239.

SCHEFFÉ, H. (1947): A useful convergence theorem for probability distributions. Ann. Math. Statist. 18, 434-438.

SCHELLHAAS, H. (1975): Bewertete regenerative Prozesse mit Anwendung auf Lagerhaltungsmodelle mit zustandsabhängigen Parametern. Opns. Res. Verf. 20, 129-162.

SCHELLHAAS, H. (1977): Semi-regenerative processes with unbounded rewards. Preprint Nr. 343, TH Darmstadt.

SCHELLHAAS, H. (1979): Semi-regenerative processes with unbounded rewards. Math. Op. Res. 4, 70-78.

SCHUBERT, H. (1971): Topologie (3. Aufl.). Teubner, Stuttgart.

SCHWEITZER, P.J. (1968): Perturbation theory and finite Markov chains. J. Appl. Prob. 5, 401-413.

SHIRYAYEV, A.N. (1978): Optimal stopping rules. Springer, New York.

STIDHAM, Sh. (1978): Socially and individually optimal control of arrivals to a GI/M/1 queue. Man. Sci. 24, 1598-1610.

STRAUCH, R.E. (1966): Negative dynamic programming. Ann. Math. Statist. 37, 871-890.

TIJMS, H.C. (1975): On dynamic programming with arbitrary state space, compact action space and the average return criterion. Report BW 55, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

WIDDER, D.V. (1946): The Laplace transform. University Press, Princeton.

WIJNGAARD, J. (1975): Stationary Markovian decision problems. Discrete time, general state space. Proefschrift, Technische Hogeschool Eindhoven.

WIJNGAARD, J. (1977): Stationary Markovian decision problems and perturbation theory of quasi-compact linear operators. Math. Op. Res. 2, 91-102.

WIJNGAARD, J. (1978): Existence of average optimal strategies in Markovian decision problems with strictly unbounded costs. In: Puterman, M.L. (ed.), Dynamic programming and its applications. Academic Press, New York, 369-386.

WIJNGAARD, J. (1979): Existence of average optimal strategies in Markovian decision processes on a countable state space and embedded optimality equations. OR Report No. 149, North Carolina State University, Raleigh.

WITTING, H. (1974): Mathematische Statistik (2., durchgesehene Auflage). Teubner, Stuttgart.

Herrn Prof. Dr. M. Schäl, der das Entstehen der vorliegenden Arbeit in zahlreichen Gesprächen durch wertvolle Anregungen und Hinweise unterstützte, bin ich zu großem Dank verpflichtet.

Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. W. Vogel für die Möglichkeit, diese Arbeit an der Abteilung für Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 72 der Deutschen Forschungsgemeinschaft zu verfassen.

Schließlich gilt mein Dank Frau A. Thiedemann für die sorgfältige Anfertigung des Manuskripts.

Lebenslauf

Am 11.11.1952 wurde ich als Sohn der Eheleute Hans Werner und Ursula Deppe, geb. Topp, in Bielefeld geboren. Von 1959 - 1963 besuchte ich in Bielefeld die Volksschule, danach den altsprachlichen Zweig des Ratsgymnasiums, an dem ich 1971 das Abitur ablegte.

Im Wintersemester 1971/72 begann ich an der Universität Bielefeld das Studium der Mathematik mit dem Nebenfach Physik. Nach dem Vordiplom im Sommer 1973 setzte ich mein Studium an der Universität Bonn fort. Im August 1976 legte ich die Diplomprüfung ab. Anschließend verbrachte ich einen einjährigen Studienaufenthalt an der City University in London. Seit dem 1. September 1977 bin ich als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Angewandte Mathematik, Abteilung Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik im Sonderforschungsbereich 72 beschäftigt.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren A. Dress, K.P. Grotemeyer, W. Hansen und G. Schiffels in Bielefeld und F. Hirzebruch, W. Klingenberg, B. Korte, R. Olivier, M. Schäl, J. Tits, H. Unger und W. Vogel in Bonn.